



P A D I N O



[www.padino.org](http://www.padino.org)



021 6690 6790



[t.me/padino\\_org](https://t.me/padino_org)

پادینو ، سبکی نو

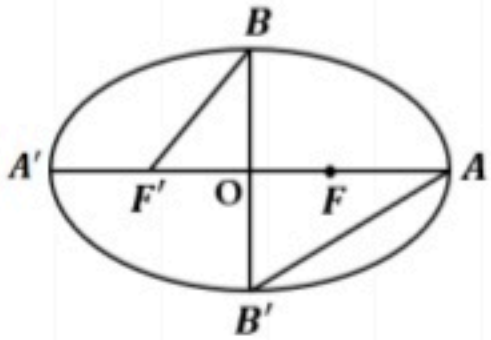
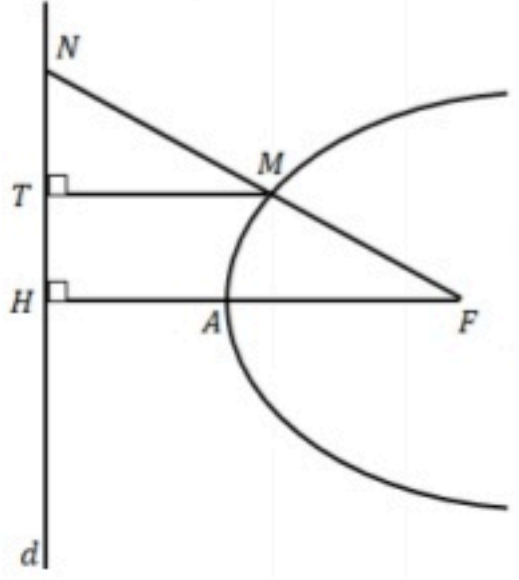
پروش استعداد درخشان (پادینو)	تاریخ امتحان: ۰۹/۰۹/۱۰	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	سوالات امتحان نهایی درس: هندسه ۳
		رشته: ریاضی- فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
www.padino.org		دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۲	
ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)		نمره

استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی و رادیکال) مجاز است.

۰/۷۵	<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.</p> <p>الف) در ماتریس قطری <math>A = \begin{bmatrix} -۳ &amp; &amp; \\ &amp; ۲ &amp; \\ &amp; &amp; ۱-۲k \end{bmatrix}</math> مقدار <math>k</math> برابر ..... است.</p> <p>ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل ..... است.</p> <p>پ) حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای واحد <math>\vec{i}</math> و <math>\vec{j}</math> و <math>\vec{k}</math> بنا می‌شود، برابر ..... است.</p>	۱
۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر <math>A_{n \times n}</math> ماتریس دلخواه و <math>I_n</math> ماتریس همانی و <math>A^2 - A = I</math> باشد، وارون ماتریس <math>A</math>، برابر <math>(I - A)</math> است.</p> <p>ب) مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت <math>r</math> که بر دایره <math>C(O, r)</math> در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره <math>C'(O, 2r)</math> است.</p> <p>پ) بردار <math>\vec{a} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)</math>، یک بردار یکه است.</p>	۲
۲	<p>ماتریس <math>A = [a_{ij}]_{3 \times 3}</math> که <math>a_{ij} = \begin{cases} j-1 &amp; i &gt; j \\ i^2 - j &amp; i = j \\ 1-i &amp; i &lt; j \end{cases}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} -1 &amp; 1 &amp; 2 \\ -2 &amp; -1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 2 &amp; -1 \end{bmatrix}</math> مفروض‌اند.</p> <p>الف) حاصل <math>A \times B</math> را به دست آورید.</p> <p>ب) دترمینان ماتریس <math>B</math> را به دست آورید. (با روش دلخواه)</p>	۳
۱/۲۵	<p>دستگاه <math>\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases}</math> را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.</p>	۴
۱/۲۵	<p>اگر <math>A</math> ماتریسی <math>3 \times 3</math> باشد و <math> A  = -2</math>، حاصل <math> 2A  +  A^{-1} ^3</math> را محاسبه کنید.</p>	۵
۱	<p>اگر <math>A = \begin{bmatrix} 2x - y &amp; 5 \\ z &amp; 4 \end{bmatrix}</math> و <math>B = \begin{bmatrix} 3 &amp; 2x + y \\ -3 &amp; 4 \end{bmatrix}</math> و <math>A = B</math> باشند، حاصل <math>x^2 - 2y + z</math> را به دست آورید.</p>	۶
۱/۵	<p>نقطه‌ی <math>A</math> و خط <math>d</math> در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از <math>A</math> به فاصله‌ی ۳ سانتیمتر و از <math>d</math> به فاصله‌ی ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید).</p>	۷

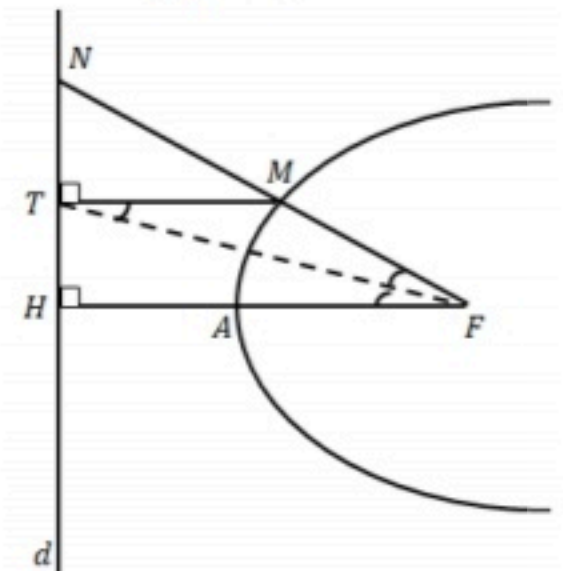
پروش استعداد درخشان (پادینو)	تاریخ امتحان: ۱۰/۰۹	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	سؤالات امتحان نهایی درس: هندسه ۳
		رشته: ریاضی- فیزیک	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
www.padino.org	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۲		

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

۸	معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$ مماس داخل باشد.	۱/۵	
۹	وضعیت خط $x+y=3$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ را تعیین کنید.	۱/۵	
۱۰	در بیضی زیر، خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ است. نسبت مساحت مثلث $OBF'$ به مساحت مثلث $OAB'$ را بیابید.	۱/۵	
			
۱۱	در شکل زیر، سهمی با راس $A$ و کانون $F$ و خط هادی $d$ رسم شده است. از $F$ به نقطه دلخواه $M$ روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا $d$ را در نقطه $N$ قطع کند و از نقطه $M$ ، $MT$ را بر $d$ عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$	۱/۵	
			
۱۲	اگر $ \vec{a}  = 10$ و $ \vec{b}  = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $ \vec{a} \times \vec{b} $ را محاسبه کنید.	۱/۵	
۱۳	بردارهای عمود بر دو بردار $\vec{a} = (3, -1, 2)$ و $\vec{b} = (1, 2, -1)$ بیابید.	۱	
۱۴	اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید.	۱/۵	
۱۵	فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{4}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $2\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.	۱/۵	
۲۰	02166906790	www.padino.org	t.me/padino_org

۰/۷۵	الف) $k = \frac{1}{3}$ (۰/۲۵) ص ۱۲ ب) دو خط متقاطع (۰/۲۵) ص ۳۹ پ) یک (۰/۲۵) ص ۸۲ و ص ۸۳	۱
۰/۷۵	الف) نادرست (۰/۲۵) ص ۲۲ ب) درست (۰/۲۵) ص ۳۹ پ) درست (۰/۲۵) ص ۷۵	۲
۲	ص ۲۱ و ص ۲۸ $A = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & -1 \\ \cdot & 1 & 6 \end{bmatrix}$ (۰/۵) الف) $A \times B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ -5 & -4 & 3 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$ (۰/۷۵) ب) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $ B  = \underbrace{(-1 + 1 - 8)}_{(۰/۲۵)} - \underbrace{(-2 - 2 + 2)}_{(۰/۲۵)} = -6$ (۰/۲۵)	۳
۱/۲۵	$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{6-4}_{(۰/۲۵)}} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ (۰/۲۵) $\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (۰/۵)	۴
۱/۲۵	$ 2A  +  A^{-1} ^2 = \underbrace{2^2 A }_{(۰/۲۵)} + \frac{1}{\underbrace{ A ^2}_{(۰/۵)}} = \underbrace{8(-2)}_{(۰/۲۵)} + \frac{1}{-8} = \frac{-129}{8}$ (۰/۲۵)	۵
۱	$z = -3$ (۰/۲۵) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1$ (۰/۵) $\rightarrow x^2 - 2y + z = -1$ (۰/۲۵)	۶

۱/۵	<p>ص ۳۹ - مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی <math>A</math> به فاصله‌ی ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز <math>A</math> و شعاع ۳ سانتی‌متر است. (۰/۲۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط <math>d</math> به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با <math>d</math> و در طرفین خط <math>d</math> است. (۰/۵) اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم.</p> <p>اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت. (۰/۲۵)</p> <p>اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد. (۰/۲۵)</p> <p>اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (۰/۲۵)</p> <p>(بررسی تعداد حالات با رسم شکل نیز صحیح است و نمره‌ی مربوطه لحاظ گردد.)</p>	۷
۱/۵	<p>ص ۴۴</p> <p><math>(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16 \rightarrow O'(2,3) \text{ و } r' = 4 \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p><math>d = OO' = \sqrt{(0-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p><math> r - r'  = d \text{ (۰/۲۵)} \rightarrow  r - 4  = \sqrt{8} \rightarrow r = 4 \pm 2\sqrt{2} \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p><math>(x-0)^2 + (y-1)^2 = (4 \pm 2\sqrt{2})^2 \text{ (۰/۵)}</math></p>	۸
۱/۵	<p>ص ۴۵ روش اول:</p> <p><math>x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p><math>x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \rightarrow x^2 + (3-x)^2 - 2(3-x) - 3 = 0 \text{ (۰/۲۵)}</math></p> <p><math>2x^2 - 4x = 0 \text{ (۰/۵)}</math></p> <p>دلتای معادله‌ی اخیر مثبت است (۰/۲۵) بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند. (۰/۲۵)</p> <p>روش دوم:</p> <p><math>x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \Rightarrow O(0,1) \text{ و } r = \frac{1}{2}\sqrt{4+12} = 2 \text{ (۰/۵)}</math></p> <p><math>OH = \frac{ 0+1-3 }{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} &lt; 2 \text{ (۰/۵)}</math></p> <p>پس خط و دایره متقاطع‌اند. (۰/۲۵)</p>	۹

۱/۵	$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \quad (0/25)$ $\frac{S_{\Delta OBF'}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{1}{2} OB \times OF' \quad (0/25)}{\frac{1}{2} OB \times OA \quad (0/25)} = \frac{\frac{1}{2} bc \quad (0/25)}{\frac{1}{2} ba \quad (0/25)} = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \quad (0/25)$	۴۸ ص	۱۰
۱/۵	<p>ص ۵۸ - بنا به تعریف سهمی <math>MT = MF</math> و لذا مثلث <math>MFT</math> متساوی الساقین است پس <math>\widehat{MTF} = \widehat{MFT} \quad (0/25)</math></p> <p>از طرفی <math>FT</math> خط مورب می باشد پس بنابر قضیه خطوط موازی و مورب <math>FH \parallel MT</math> و <math>\widehat{MTF} = \widehat{TFH} \quad (0/25)</math></p> <p>از دو رابطه ی اخیر نتیجه می شود که <math>TF</math> نیمساز زاویه ی <math>NFH</math> می باشد. <math>(0/25)</math></p> <p>با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث <math>FHN</math> داریم:</p> $\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH} \quad (0/25)$ <p>(برای اثبات با استفاده از قضیه تالس نیز نمره لحاظ گردد.)</p> 		۱۱
۱/۵	$\vec{a} \cdot \vec{b} =  \vec{a}   \vec{b}  \cos \theta \quad (0/25) \quad \rightarrow \quad 12 = 10 \times 2 \times \cos \theta \quad \rightarrow \quad \cos \theta = \frac{3}{5} \quad (0/25)$ $\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (0/5) \quad (\theta \text{ حاده است})$ $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}  \sin \theta = 2 \times 10 \times \frac{4}{5} = 16 \quad (0/25)$	۸۴ ص	۱۲
۱	$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k} = (-3, 5, 7) \quad (0/25)$	۸۴ ص	۱۳

پروژه استعداد درخشان (پادینو)	رشته: ریاضی فیزیک	هندسه ۳
	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	
www.padino.org	دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد داخل و خارج کشور در نوبت دی ماه سال ۱۴۰۲	
ردیف	راهنمای تصحیح	
نمره		

۱/۵	$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-2, 1, 2) \quad (0/5)$ $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{ \vec{d} } \vec{d} = \frac{(-2-2+4)}{(-2)^2+1^2+2^2} (-2, 1, 2) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad (0/25)$	۱۴	۸۴ ص
۱/۵	$S = \frac{1}{2}  2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})  = \frac{1}{2}  2\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b}  \quad (0/25)$ $S = \frac{1}{2}  0 + 2\vec{a} \times \vec{b}  = \frac{2}{2}  \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}   \vec{b}   \sin\theta  = 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$	۱۵	۸۴ ص
۲۰	02166906790	www.padino.org	t.me/padino_org



P A D I N O



<http://www.Padino.org>



021 6690 6790



[t.me/padino\\_org](https://t.me/padino_org)

**آینده شما ممکن است ربطی به گذشته تان نداشته باشد  
کافیست اراده کنید**