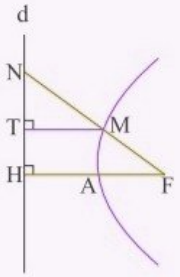
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

۱ در شکل زیر سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$.



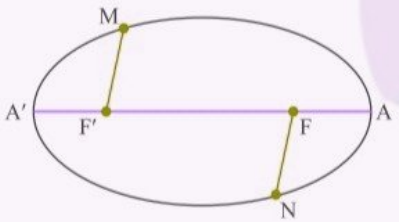
۲ مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $y^۲ + ۴x = ۸$ را به دست آورید.

۳ معادلهٔ قطر کانونی یک بیضی، $y = -۱$ و معادلهٔ قطر کوچک، $x = ۲$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی را به دست آورید.

۴ ماتریس‌های A و B به‌صورت زیر تعریف شده‌اند. اگر حاصل‌ضرب AB، یک ماتریس اسکالر غیرصفر باشد، مقادیر x، y و z را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} x & ۲ \\ y & z \end{bmatrix}$$

۵ در شکل زیر دو نقطهٔ M و N روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. با فرض $MF' = NF$، نشان دهید MF موازی NF' است.

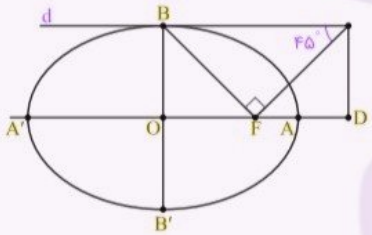


۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه حاصل $A^۳ - ۲A^۲$ را حساب کنید.

۷ اگر A ماتریسی ۳×۳ و وارون‌پذیر باشد، حاصل $\left|\frac{۱}{|۳A^{-۱}|}۳A^{-۱}\right|$ چند برابر $|A|^{۲}$ است؟

۸ اگر $A = \begin{bmatrix} k & k \\ k & k \end{bmatrix}$ و $A^n = ۲^{۳n-۳} \times ۵^{n-۱}A$ باشد، ماتریس A را به دست آورید.

۹ در بیضی زیر AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطهٔ B بر بیضی مماس است. پاره‌خط BF را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند و از C عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $B\hat{C}F = ۴۵^\circ$، مقدار $\frac{AD}{EF}$ را به‌دست آورید.

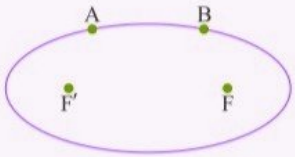


۱۰ اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، ابتدا ماتریس $A^{-۱}$ را به دست آورده و $|A|$ را با $|A^{-۱}|$ مقایسه کنید.

۱۱ اگر $۳A = \begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-۱}|$ را محاسبه کنید.

۱۲ سهمی که نقاط $S(۱,۲)$ و $F(-۳,۲)$ به ترتیب مختصات رأس و کانون آن است، محور xها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱۳ در شکل زیر دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



۱۴ نقاط $A(-۱,-۱)$ ، $B(۱,۱)$ و $C(۱,-۳)$ رئوس مثلث ABC هستند. معادلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث را بنویسید، سپس معادلهٔ مماس بر این دایره در نقطهٔ A را به دست آورید.

۱۵ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید.

۱۶ اگر صفحهٔ P، در یکی از موقعیت‌ها، با مولد سطح مخروطی، موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل، ..... است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ برابر است با .....

۱۸ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطهٔ ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک‌فاصله باشند را ..... می‌نامیم.

۱۹ دترمینان ماتریس زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۰ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & ۵ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۴ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

۲۰ خط L و دو نقطهٔ A و B خارج آن، مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از خط L به فاصلهٔ d بوده $(d > ۰)$ و از A و B به یک فاصله باشد.

۲۱ وضعیت نقاط $A\,(۳, ۴)$ و $B\,(۵, -۲)$ را نسبت به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۵ = ۰$ تعیین کنید.

۲۲ دستگاه $\begin{cases} x + ۲y = ۵ \\ ۲x + y = ۴ \end{cases}$ را به روش ماتریس وارون حل کنید.

۲۳ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$ در تساوی $A^۲ = mA + ۲nI$ صدق کند، مقدار m و n را به دست آورید.

۲۴ در یک بیضی فاصلهٔ کانونی برابر ۸ است. اگر نقاط $B(-۲, ۴)$ و $B'(-۲, -۲)$ دو سر قطر کوچک بیضی باشند، خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

۲۵ معادلهٔ دایره‌ای را به دست آورید که خطوط $x - ۲y = ۴$ و $x + y = ۱$ شامل قطرهایی از دایره باشند و خط $۴x - ۳y = ۶$ بر دایره مماس باشد.

۲۶ سهمی به معادله $y^۲ = -۲x - ۴y$ مفروض است.

الف معادله متعارف (استاندارد) سهمی را بنویسید.

ب مختصات رأس و معادله خط هادی سهمی را به‌دست آورید.

۲۷ در یک بیضی، طول قطر بزرگ و قطر کوچک به ترتیب ۱۰ و ۸ سانتی‌متر است. طول وتری از بیضی که بر محور کانونی عمود بوده و بر دایره‌ای با قطر منطبق بر قطر کوچک بیضی، مماس است، چقدر است؟

۲۸ می‌خواهیم مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ را در حالت کلی به‌دست آوریم.

الف با پر کردن جاهای خالی این کار را انجام دهید:

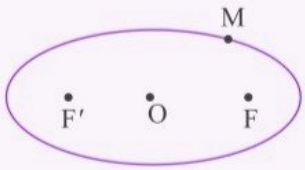
$$(x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴})$$
$$+ (y^۲ + by + \cdots - \cdots) + c = ۰$$
$$\Rightarrow (x + \cdots)^۲ + (y + \cdots)^۲$$
$$- \cdots - \cdots + c = ۰ \Rightarrow$$
$$(x + \cdots)^۲ + (y + \cdots)^۲ = \frac{\cdots\cdots}{۴}$$
$$\Rightarrow O(\cdots, \cdots),\ r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$$

ب با توجه به شرط نامنفی بودن عبارت زیر رادیکال چه نتیجه‌ای درباره c, b, a به‌دست می‌آید؟

۲۹ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است.

الف فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

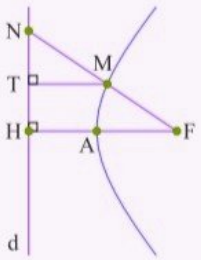
۳۰ در شکل زیر نقطهٔ M روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$



۳۱ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $x + ۲y + ۳z$ را به دست آورید.

۳۲ دو نقطهٔ A و B و خط l مفروض‌اند. نقاطی را بیابید که از A و B به یک فاصله و از l به فاصلهٔ d باشد.

۳۳ در شکل زیر که با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۳۴ اگر ماتریس $A = BA$ و ماتریس $B = AB$ باشد، آنگاه $(A+2B)(A-B)$ چند برابر $(A-B)$ است؟

۳۵ اگر $A = [a_{ij}]_{3\times 2}$ و $B = [b_{ij}]_{2\times 3}$ باشد و a_{ij} و b_{ij} به‌صورت زیر تعریف شده باشند، ماتریس $B \times A$ را محاسبه کنید.

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j & ; i=j \\ ij & ; i\neq j \end{cases} \quad , \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i=j \\ i-j & ; i\neq j \end{cases}$$

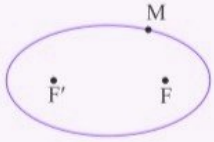
۳۶ از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} x & 2x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ مقادیر x را به دست آورید.

۳۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر هر دو دایرهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ و $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$ مماس باشد.

۳۸ نمودار معادلهٔ $x^{۲} + ۲x - ۴y + ۵ = ۰$ مربوط به چه شکلی است؟ آن را رسم کنید.

۳۹ دستگاه $\begin{cases} ۳x + ۴y = ۱۰ \\ -x + ۳y = ۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۴۰ در شکل زیر نقطهٔ M روی بیضی به کانون‌های F و F' قرار دارد. از نقطهٔ M خط d را مماس بر بیضی رسم کرده و از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطهٔ N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.



۴۱ دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۴۲ معادلهٔ سهمی را به دست آورید که خط هادی آن $x = -۱$ و نقطهٔ $(۳ , ۲)$ کانون آن باشد.

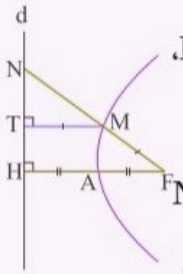
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۳ دو دایرهٔ $C : (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۴$ و $C' : x^۲ + y^۲ - ۶x + ۸y - m = ۰$ مماس داخل هستند. m را بیابید.

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **هندسه**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۴ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱



اولاً چون نقطهٔ M روی سهمی قرار دارد، $MF = MT$ و چون نقطهٔ A رأس سهمی است، $HA = AF$، حال داریم:

$$\overset{\triangle}{NHF} : TM \| HF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{TM}{HF} = \frac{NM}{FN} \xrightarrow[HF=۲FA]{TM=MF} \frac{MF}{۲FA} = \frac{NM}{FN}$$

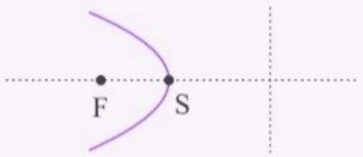
$$\Rightarrow \frac{FN}{۲FA} = \frac{NM}{MF} \xrightarrow{\times ۲} \frac{FN}{FA} = ۲(\frac{NM}{MF}) \quad (*)$$

$$\text{قضیهٔ تالس} \Rightarrow \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{(*)} \frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۲

$$y^۲ + ۴x = ۸ \Rightarrow y^۲ = -۴(x-۲)$$

رو به چپ : $S(۲\,,\,۰)$



$$۴p = ۴ \Rightarrow p = ۱$$

کانون : $F(۲-۱\,,\,۰) \Rightarrow F(۱\,,\,۰)$

خط هادی : $x = ۲+۱ \Rightarrow x = ۳$

۳

مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس $O(۲\,,\,-۱)$. باتوجه‌به اینکه $AA' = ۱۲$ و $BB' = ۸$، بنابراین:

$$AA' = ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$$
$$BB' = ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

همچنین:

$$c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۵}$$

۴ یک ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن، با هم برابر و درایه‌های غیرقطر اصلی آن، صفر هستند. بنابراین، حاصل‌ضرب AB باید به‌شکل زیر باشد:

$$AB = \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$$

که در آن، k یک عدد حقیقی غیر صفر است.

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & ۲ \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲x - y & ۴ - z \\ ۳x + y & ۶ + z \end{bmatrix}$$

با برابر قرار دادن ماتریس حاصل‌ضرب و ماتریس اسکالر، یک دستگاه معادلات به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۲x - y & ۴ - z \\ ۳x + y & ۶ + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & ۰ \\ ۰ & k \end{bmatrix}$$

از این تساوی، چهار معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ۲x - y = k & (۱) \\ ۴ - z = ۰ & (۲) \\ ۳x + y = ۰ & (۳) \\ ۶ + z = k & (۴) \end{cases}$$

از معادلهٔ (۲)، مقدار z به‌دست می‌آید ($z = ۴$). مقدار z را در معادلهٔ (۴) قرار می‌دهیم تا k را بیابیم:

$$k = ۶ + ۴ = ۱۰$$

مقدار k را در معادلهٔ (۱) جاگذاری کرده و دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x - y = ۱۰ \\ ۳x + y = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = ۲, y = -۶$$

بنابراین، مقادیر مجهول عبارتند از:

$$x = ۲, y = -۶, z = ۴$$

۵ M روی بیضی است، پس داریم: $MF + MF' = ۲a$

N روی بیضی است، پس داریم: $NF + NF' = ۲a$

پس:

$$MF + MF' = NF + NF' \xrightarrow{MF' = NF} MF = NF'$$

بنابراین چهارضلعی $MFNF'$ متوازی‌الاضلاع است لذا $MF \parallel NF'$

۶

$$\left.\begin{aligned} A^{۲} &= A \times A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \\ A^{۳} &= A^{۲} \times A = \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & -۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow A^{۳} - ۲A^{۲} = \begin{bmatrix} ۸ & -۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲ \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۷

نکته: اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه $|kA| = k^{n}|A|$.

نکته: $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

$$\left|\frac{۱}{|۳A^{-۱}|} ۳A^{-۱}\right| = (\frac{۱}{|۳A^{-۱}|})^{۳} |۳A^{-۱}| = (\frac{۱}{۳^{۳}|A^{-۱}|})^{۳} \times ۳^{۳}|A^{-۱}|$$

$$= \frac{۱}{۳^{۹}|A^{-۱}|^{۳}} \times ۳^{۳} \times |A^{-۱}| = \frac{۱}{۳^{۶}} \times (\frac{۱}{|A^{-۱}|})^{۲} = \frac{۱}{۷۲۹}|A|^{۲}$$

بنابراین $\frac{۱}{۷۲۹}$ برابر $|A|^{۲}$ است.

۸

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \times a \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= a^{۲} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = ۲a^{۲} \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = ۲a \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} = ۲aA$$

$$A^{۳} = A \times A^{۲} = A \times (۲aA) = ۲a(\underbrace{A \times A}_{۲aA}) = ۲a(۲aA) = ۲^{۲}a^{۲}A$$

درنتیجه ماتریس A^{n} به‌صورت زیر است:

$$A^{n} = ۲^{n-۱}k^{n-۱}A$$

$$\begin{cases} A^{n} = ۲^{۳n-۳} \times ۵^{n-۱}A \\ A^{n} = ۲^{n-۱}k^{n-۱}A \end{cases} \Rightarrow ۲^{۳n-۳} \times ۵^{n-۱} = ۲^{n-۱}k^{n-۱}$$

$$\Rightarrow (۲^{۳} \times ۵)^{n-۱} = (۲k)^{n-۱} \Rightarrow ۴۰ = ۲k \Rightarrow k = ۲۰$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۲۰ & ۲۰ \\ ۲۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

۹

$$AF = a - c$$

$$FD = b = \sqrt{a^{۲} - b^{۲}} = \sqrt{c^{۲}} = c$$

$$AD = FD - FA = c - (a - c) = ۲c - a$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{۲c - a}{a - c}$$

۱۰

$$A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۱۰-۶=۴$$

$$\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۴}\begin{bmatrix}۲ & -۲\\ -۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲}\\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۵}{۴}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۵}{۸}-\frac{۳}{۸}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

۱۱

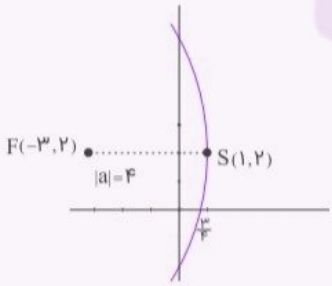
$$|۳A|=۴|A|^{۲}+۵\Rightarrow ۴|A|^{۲}-۹|A|+۵=۰\Rightarrow \begin{cases}|A|=۱\Rightarrow |A^{-۱}|=۱\\ |A|=\frac{۵}{۴}\Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

۱۲ ابتدا معادلهٔ سهمی را باتوجه‌به شکل آن به دست می‌آوریم.

ازآنجاکه $FS=a=۴$ و سهمی افقی و دهانهٔ آن به سمت چپ است، بنابراین معادلهٔ آن به‌صورت $(y-k)^{۲}=-۴a(x-h)$ می‌باشد. باتوجه‌به اینکه $S(۱,۲)$ و $a=۴$ است، درنتیجه داریم:

$$(y-۲)^{۲}=-۱۶(x-۱)\xrightarrow{y=۰}(-۲)^{۲}=-۱۶(x-۱)$$

$$\Rightarrow ۴=-۱۶x+۱۶\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}$$



۱۳ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، باتوجه‌به تعریف بیضی:

$$AF+AF'=۲a=BF+BF'\xrightarrow{AF'=BF}AF=BF'$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(AF=BF',\ AF'=BF,\ FF'=FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند، درنتیجه دو زاویه $A\hat{F}F'=B\hat{F'}F$، مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF=MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره خط FF' (قطر کوچک بیضی) است.

۱۴ معادلهٔ ضمنی دایره به‌صورت $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ می‌باشد که در آن $a^۲ + b^۲ > ۴c$.
نقاط A، B و C روی دایره می‌باشند، پس:

$$A(-۱,-۱):\ ۱+۱-a-b+c=۰ \Rightarrow a+b-c=۲ \quad (۱)$$
$$B(۱,۱):\ ۱+۱+a+b+c=۰ \Rightarrow a+b+c=-۲ \quad (۲)$$
$$C(۱,-۳):\ ۱+۹+a-۳b+c=۰ \Rightarrow a-۳b+c=-۱۰ \quad (۳)$$
$$\xrightarrow{(۱)+(۲)} ۲a+۲b=۰ \Rightarrow a+b=۰ \quad (۴)$$
$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} ۲c=-۴ \Rightarrow c=-۲$$

با جایگذاری c در معادلهٔ (۳) داریم:

$$a-۳b-۲=-۱۰ \Rightarrow a-۳b=-۸ \xrightarrow{(۴)} -b-۳b=-۸ \Rightarrow b=۲\ ,\ a=-۲$$

پس معادلهٔ دایره به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y-۲=۰$$

مرکز دایرهٔ فوق $W(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۱)$ است. ازآنجاکه شعاع دایره در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، شیب مماس در نقطهٔ $A(-۱,-۱)$ عمود بر شیب پاره‌خط WA است و داریم:

$$m_{WA}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-۱-(-۱)}{-۱-۱}=۰$$

پس شیب مماس بی‌نهایت خواهد بود و معادلهٔ مماس $x=-۱$ خواهد بود.

۱۵ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسأله است.
الف- اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.
ب- اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.
پ- اگر خط l هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

پاسخ سؤال ۱۶

۱۶ سهمی

پاسخ سؤالات ۱۷ تا ۱۸

۱۷ -۳۰

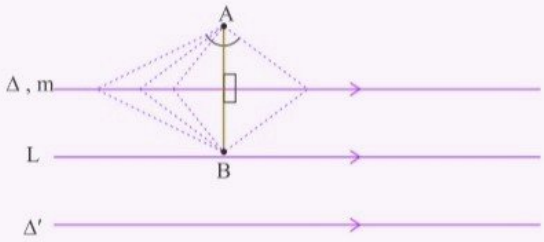
۱۸ سهمی

۱۹

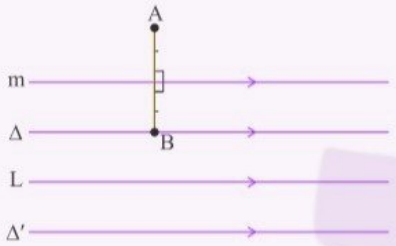
$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۱۳ \\ ۲ & -۴ \end{vmatrix} = ۰ - ۲۶ = -۲۶$$

۲۰ اولاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط L به فاصلهٔ d باشند، دو خط Δ و Δ' به موازات آن است. ثانیاً مکان هندسی نقاطی از صفحه که از A و B به یک فاصله باشند، خط m عمودمنصف پاره‌خط AB است، پس جواب مسئله، محل برخورد خط m با Δ یا Δ' است که وضعیت‌های زیر را داریم:

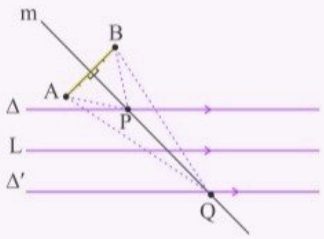
m بر یکی از Δ یا Δ' منطبق - بی‌شمار جواب:



m با Δ و Δ' موازی و متمایز - فاقد جواب:



m با Δ و Δ' متقاطع - دو جواب:



۲۱ ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را حساب می‌کنیم:

$$O\,(۲, -۱) \quad , \quad r = \frac{\sqrt{۱۶ + ۴ + ۲۰}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۱۰}}{۲} = \sqrt{۱۰}$$

حال فاصلهٔ نقاط داده‌شده با مرکز دایره را محاسبه و با شعاع مقایسه می‌کنیم:

$AO = \sqrt{۱^۲ + ۵^۲} = \sqrt{۲۶} \Rightarrow OA > r \Rightarrow$ A خارج دایره قرار دارد

$BO = \sqrt{۳^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow OB = r \Rightarrow$ B روی دایره قرار دارد

۲۲ از دستگاه داده‌شده به دست می‌آید:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\ ,\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}۵\\ ۴\end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱-۴}\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-۱}B=\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ \frac{۲}{۳} & -\frac{۱}{۳}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۵\\ ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$$

یعنی $x=۱$ و $y=۲$.

۲۳ ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۷\\ ۲۱ & ۲۲\end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس‌های $A^۲$، A و I را در تساوی داده شده قرار می‌دهیم:

$$A^۲=mA+۲nI$$
$$\begin{bmatrix}۱ & -۷\\ ۲۱ & ۲۲\end{bmatrix}=m\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}+۲n\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱ & -۷\\ ۲۱ & ۲۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲m+۲n & -m\\ ۳m & ۵m+۲n\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}m=۷\\ n=-\frac{۱۳}{۲}\end{cases}$$

۲۴ ازآنجاکه فاصلهٔ کانونی برابر $۲c=۸$ است، بنابراین $c=۴$ می‌شود. حال برای به دست آوردن b داریم:

$$۲b=BB'=\sqrt{(-۲-(-۲))^۲+(-۲-۴)^۲}=\sqrt{۳۶}=۶\Rightarrow ۲b=۶\Rightarrow b=۳$$

حال باتوجه‌به رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ در بیضی داریم:

$$a^۲=b^۲+c^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵\Rightarrow a=۵$$

بنابراین خروج از مرکز بیضی برابر $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$ است.

۲۵

$$\begin{cases}x-۲y=۴\\ x+y=۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+۲y=-۴\\ x+y=۱\end{cases}\Rightarrow ۳y=-۳$$
$$\Rightarrow y=-۱\ ,\ x=۲\Rightarrow O(۲\ ,\ -۱)$$

$$OH=R=\frac{|۴(۲)-۳(-۱)-۶|}{\sqrt{۱۶+۹}}=۱\ \Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۱$$

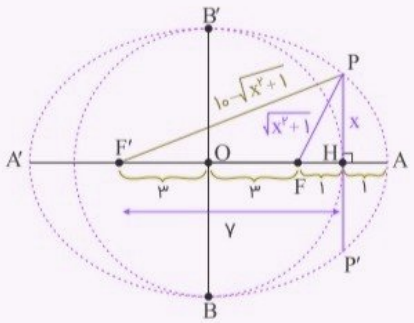
۲۶ الف

$$y^۲=-۲x-۴y\Rightarrow y^۲+۴y+۴=-۲x+۴\Rightarrow (y+۲)^۲=-۲(x-۲)$$

ب

$$\begin{cases} A(۲,-۲) \\ ۴a = ۲ \Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad x = \frac{۵}{۲}$$

۲۷ با استفاده از اطلاعات داده‌شده، بیضی را رسم می‌کنیم:



$$a = ۵ \ , \ \ b = ۴ \Rightarrow c = ۳$$
$$OH = ۴ \Rightarrow FH = OH - OF = ۴ - ۳ = ۱$$
$$\overset{\Delta}{FPH} : PF^۲ = x^۲ + ۱^۲ \Rightarrow PF = \sqrt{x^۲ + ۱}$$
$$PF + PF' = ۲a \Rightarrow PF' = ۱۰ - \sqrt{x^۲ + ۱}$$
$$\overset{\Delta}{PF'H} : PF'^۲ = PH^۲ + F'H^۲$$
$$\Rightarrow (۱۰ - \sqrt{x^۲ + ۱})^۲ = x^۲ + ۷^۲$$
$$\Rightarrow ۱۰۰ + \cancel{x^۲} + ۱ - ۲۰\sqrt{x^۲ + ۱} = \cancel{x^۲} + ۴۹$$
$$\Rightarrow \cancel{۲۰}^{۱۰} \sqrt{x^۲ + ۱} = \cancel{۵۲}^{۲۶} \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۱} = \frac{\cancel{۲۶}^{۱۳}}{\cancel{۱۰}_{۵}}$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۱ = \frac{۱۶۹}{۲۵} \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۶۹}{۲۵} - ۱ = \frac{۱۴۴}{۲۵} \Rightarrow x = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$
$$PP' = ۲PH = ۲x = ۲ \times ۲/۴ = ۴/۸$$

۲۸ الف

$$(x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴})$$
$$+ (y^۲ + by + \frac{b^۲}{۴} - \frac{b^۲}{۴}) + c = ۰$$
$$\Rightarrow (x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴} - \frac{b^۲}{۴} + c = ۰$$
$$\Rightarrow (x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴}$$
$$\Rightarrow O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}), \ r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$$

ب

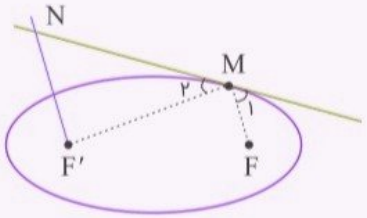
$$a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰$$
$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ > ۴c$$

۲۹ الف

$$\text{مرکز } O \left| \begin{array}{l} \dfrac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \dfrac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right. \qquad FF' = |۳-(-۵)| = ۸ = ۲c \Rightarrow c = ۴$$

۳۰ مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است، بنابه خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ ازطرفی: $MF \parallel NF'$ و d مورب، درنتیجه $\hat{N} = \hat{M}_۱$ (d خط شامل نقاط M و N است)

نتیجه می‌شود: $\hat{N} = \hat{M}_۲$ مثلث MNF' متساوی الاساقین است، یعنی $MF' = NF'$.



۳۱

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

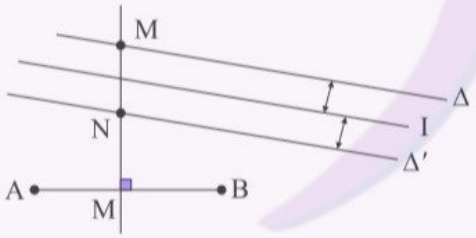
$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۳}{۲} \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow x + ۲y + ۳z = \dfrac{۳}{۲} + ۴ - ۶ = \dfrac{-۱}{۲} \\ z = -۲ \end{cases}$$

۳۲ عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. نقاط باید روی عمودمنصف قرار بگیرد. مکان هندسی تمام نقاطی که از خط l به فاصلهٔ d هستند دو خط موازی آن‌ها $(\Delta\ ,\ \Delta')$ هستند. محل‌های برخورد عمودمنصف با خطوط Δ و Δ' جواب‌های مسئله هستند. (۲ جواب در شکل)

بحث:

۱- اگر عمودمنصف موازی خطوط Δ و Δ' باشد مسأله جواب ندارد.

۲- اگر عمودمنصف بر یکی از خطوط Δ یا Δ' منطبق باشد بی‌شمار جواب دارد.



۳۳

روش اول:

بنابه تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است: $M\hat{T}F = T\hat{F}M$ (۱)

از طرفی بنابه خطوط موازی $FH||MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود: $M\hat{T}F = T\hat{F}H$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنابه قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

روش دوم:

$FH||MT$ باتوجه‌به قضیهٔ تالس در مثلث NHF:

$$\begin{cases} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$

۳۴

$$B = AB \xrightarrow{A=BA} B = (BA)B \Rightarrow B = B(\underbrace{AB}_{B}) \Rightarrow B = B^۲$$

$$A = BA \xrightarrow{B=AB} A = (AB)A \Rightarrow A = A(BA) \Rightarrow A = A^۲$$

$$\Rightarrow (A+۲B)(A-B) = \underbrace{A^۲}_{A} - \underbrace{AB}_{B} + ۲\underbrace{BA}_{A} - ۲\underbrace{B^۲}_{B} = ۳A - ۳B = ۳(A-B)$$

بنابراین $(A+۲B)(A-B)$ سه برابر $(A-B)$ است.

۳۵

ابتدا B و A را به‌وسیلهٔ درایه‌هایشان نمایش می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}_{۳\times ۲} , \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}_{۲\times ۳}$$

$$\Rightarrow B \times A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۲ \\ ۱ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ & -۱۴ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳۶

$$\begin{bmatrix} x & ۲x & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$$

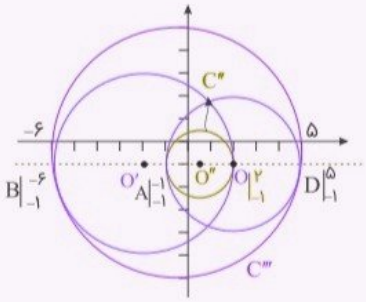
$$\begin{bmatrix} ۱۱x-۱ & -x-۲ & -۳x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow ۱۱x^۲ - x - ۲x^۲ - ۴x + ۳x = ۰$$

$$\Rightarrow ۹x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(۹x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۲}{۹} \end{cases}$$

۳۷ ابتدا دو دایرهٔ داده‌شده را با پیدا کردن مختصات مرکز و شعاع رسم می‌کنیم.

$$C : x^{۲} + y^{۲} - ۴x + ۲y = ۴ \Rightarrow O\,(۲, -۱) \quad , \quad r = \frac{\sqrt{۱۶ + ۴ + ۱۶}}{۲} = ۳$$

$$C' : x^{۲} + y^{۲} + ۴x + ۲y = ۱۱ \Rightarrow O'\,(-۲, -۱) \quad , \quad r' = \frac{\sqrt{۱۶ + ۴ + ۴۴}}{۲} = ۴$$



طبق شکل، دو دایرهٔ C'' و C''' بر هر دو دایرهٔ C و C' مماس است. در دایرهٔ C''، AO قطر است، بنابراین مرکز O'' وسط AO خواهد بود.

$$O''(\frac{۱}{۲}, -۱) \qquad ۲r'' = |OA| = ۳ \Rightarrow r'' = \frac{۳}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ C'' به‌صورت $(x - \frac{۱}{۲})^{۲} + (y + ۱)^{۲} = \frac{۹}{۴}$ خواهد بود.

در دایرهٔ C'''، نقاط D و B دو سر قطری از آن هستند، یعنی مرکز C''' وسط BD و قطر دایره برابر فاصلهٔ بین B و D است، درنتیجه:

$$BD \text{ وسط } O''' \left| \begin{array}{l} \dfrac{-۶ + ۵}{۲} = -\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{-۱ - ۱}{۲} = -۱ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |BD| = ۲r''' = ۱۱ \Rightarrow r''' = \frac{۱۱}{۲}$$

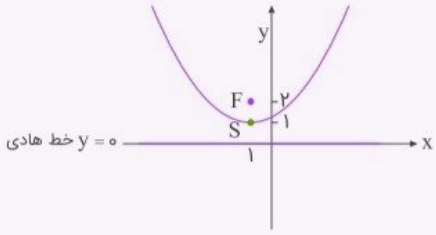
$$\Rightarrow C''' : (x + \frac{۱}{۲})^{۲} + (y + ۱)^{۲} = \frac{۱۲۱}{۴}$$

۳۸ ابتدا معادله را به حالت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^{۲} + ۲x = ۴y - ۵ \xrightarrow{+۱} x^{۲} + ۲x + ۱ = ۴y - ۴$$
$$\Rightarrow (x+۱)^{۲} = ۴(y-۱)$$

یعنی معادله مربوط به سهمی است که دهانهٔ آن روبه‌بالا است و مختصات رأس آن $S(-۱, ۱)$ می‌باشد، همچنین:

$$۴a = ۴ \Rightarrow a = ۱$$



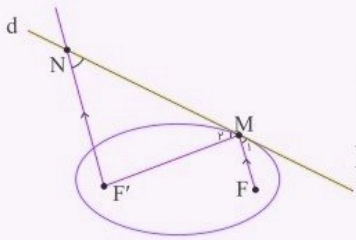
۳۹ ماتریس ضرایب دستگاه عبارت است از $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و چون $|A| = ۱۳ \neq ۰$ پس $A^{-۱}$ وجود دارد و داریم:

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} \times \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۱۳} & \frac{-۴}{۱۳} \\ \frac{۱}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \end{cases}$$

۴۰ اولاً چون خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس است، $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲ = \alpha$. حال داریم:



$$(FM \| F'N), (\text{مورب } MF') \Rightarrow \hat{N} = \hat{M}_۱ \xrightarrow{\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲} \hat{N} = \hat{M}_۲$$
$$\overset{\Delta}{F'MN} : \hat{N} = \hat{M}_۲ \Rightarrow NF' = MF'$$

۴۱

روش اول:

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقاط A و B فاصلهٔ برابر دارند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

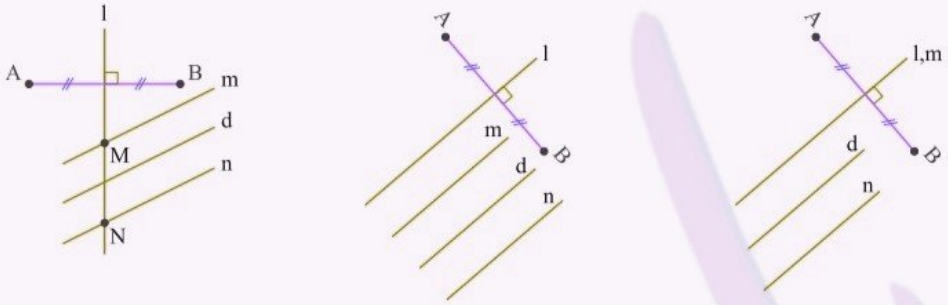
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن است.

نقاط برخورد عمودمنصف با دو خط موازی جواب مسئله است.

بحث:

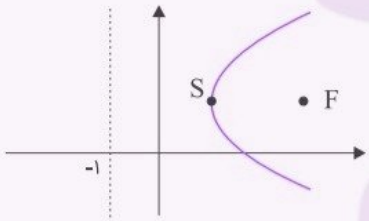
- حالت اول: اگر خط عمودمنصف، هر دو خط موازی را قطع کند، مسئله دارای دو جواب است.
- حالت دوم: اگر خط عمودمنصف، دو خط موازی را قطع نکند، مسئله جواب ندارد.
- حالت سوم: اگر خط عمودمنصف، منطبق بر یکی از دو خط موازی باشد، مسئله دارای بی‌شمار جواب است.

روش دوم:



مسأله دو جواب دارد　　مسأله جواب ندارد　　مسأله بی‌شمار جواب دارد

۴۲



وسط کانون و خط هادی : $S(\frac{-۱+۳}{۲}, ۲) \Rightarrow S(۱, ۲)$

$P = SF = |۱-۳| = ۲$

معادله : $(y-۲)^۲ = ۴(۲)(x-۱)$

۴۳ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را حساب می‌کنیم:

$$C : O(۱, -۱) \quad , \quad r = ۲$$
$$C' : O'(۳, -۴) \quad , \quad r' = \frac{\sqrt{۳۶ + ۶۴ + ۴m}}{۲} = \sqrt{۲۵ + m}$$

برای آنکه دو دایره مماس داخل باشند باید $OO' = |r - r'|$، بنابراین:

$$OO' = \sqrt{(۳ - ۱)^۲ + (-۴ + ۱)^۲} = \sqrt{۴ + ۹} = \sqrt{۱۳}$$
$$\Rightarrow \left|۲ - \sqrt{۲۵ + m}\right| = \sqrt{۱۳}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} ۱)\ ۲ - \sqrt{۲۵ + m} = \sqrt{۱۳} \Rightarrow \sqrt{۲۵ + m} = ۲ - \sqrt{۱۳} \\ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵ + m = ۱۷ - ۴\sqrt{۱۳} \Rightarrow m = -۴\sqrt{۱۳} - ۸ \quad \text{ق.ق} \\ ۲)\ ۲ - \sqrt{۲۵ + m} = -\sqrt{۱۳} \Rightarrow ۲۵ + m = ۲ + \sqrt{۱۳} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۲۵ + m = ۱۷ + ۴\sqrt{۱۳} \\ \Rightarrow m = ۴\sqrt{۱۳} - ۸ \quad \text{ق.ق} \end{cases}$$