

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۳ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

ریاضیات گسسته

۱ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و p/a , ثابت کنید: $(p, a) = 1$.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته کار در کلاس

۲ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه به دلخواه انتخاب کرد؟

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۳ ابتدا ثابت کنید که هر عدد صحیح و فرد مانند a به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشته می‌شود، سپس نشان دهید که مربع هر عدد فرد به شکل $(4t + 1)$ نوشته می‌شود. (باقیمانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، مساوی با ۱ است)

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال

۴ اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = 1$.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۵ شخصی در یک مسابقه علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورتهایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۶ اگر $m, n \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$ ، ثابت کنید:

$$m \leq n, a|b \Rightarrow a^m|b^n$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۷ به چند طریق می‌توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۸ عددی حقیقی مانند x ارائه کنید به‌طوری‌که $x^3 < x^2$.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

همانگ کشوری ریاضی و فیزیک دوازدهم سه نما ۱۴۰۲

۹ اگر عدد طبیعی $a > 1$ دو عدد $9k + 7$ و $7k + 6$ را عاد کند آنگاه مقدار a برابر است.

۱۰ گراف کامل K_p یک گراف منتظم است.

۱۱ حاصل $(2m + 1, 3m + 2)$ برابر است.

۱۲ در یک گراف از مرتبه ۱۲ با $\Delta = 3$ حداقل رأس برای احاطه تمام رئوس لازم است.

۱۳ اگر $a|b$ ، نشان دهید که $a^n|b^n$.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته کار در کلاس

۱۴ اگر عددی مانند k در \mathbb{Z} باشد به طوری که $4k + 1 \equiv 5$ ، ثابت کنید:

$$25 | 16k^2 + 28k + 6$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۱۵ ثابت کنید به دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح را اضافه کرد. به عبارت دیگر:

$$a \equiv b \Rightarrow a + c \equiv b + c$$

همانگ کشوری ریاضی و فیزیک دوازدهم سه نما ۱۴۰۲

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۴ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		
	نمره		

ریاضیات گسسته

۱

$$(p, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|p & \xrightarrow{\text{اول } p} d = 1 \text{ یا } d = p \\ d|a & (۱) \end{cases}$$

پس فقط $d = 1$ یا $d = p \Rightarrow (p, a) = 1$ (و این با فرض p/a تناقض دارد) $p|a$ $d = p \xrightarrow{(۱)}$ اگر

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، این مطلب ممکن است برقرار نباشد:

$$(۴, ۶) = ۲ \neq ۱ \text{ ولی } ۴/۶ : \text{ مثال}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته کار در کلاس

۲

گام اول: تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y در نظر گرفته و معادله سیاله را می‌نویسیم: $x + y = ۹$
گام دوم: معادله سیاله را به معادله همبستگی تبدیل کرده و داریم:

$$x \equiv ۹ \Rightarrow x = k + ۹ ; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: $x = k + ۹$ را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$k + ۹ + y = ۹ \Rightarrow y = -k ; k \in \mathbb{Z}$$

گام چهارم: چون تعداد گل‌ها نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$k + ۹ \geq ۰, -k \geq ۰ \Rightarrow k \geq -۹, k \leq ۰$$

$$\Rightarrow -۹ \leq k \leq ۰ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۰$$

بنابراین به ۱۰ طریق این عمل ممکن است.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

فرض کنیم $a \in \mathbb{Z}$ و a فرد باشد، اگر a را بر ۴ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$a = 4k \quad (1)$$

$$a = 4k + 1 \quad (2)$$

$$a = 4k + 2 \quad (3)$$

$$a = 4k + 3 \quad (4)$$

(چهار مجموعه $A_1 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k\}$ و $A_2 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 1\}$ و $A_3 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 2\}$ و $A_4 = \{a \in \mathbb{Z} | a = 4k + 3\}$ را افراز می‌کنند) حالت‌های $a = 4k$ و $a = 4k + 2$ زوج بوده و لذا $a = 4k + 1$ یا $a = 4k + 3$.

$$\text{اگر } a = 4k + 1 \Rightarrow a^2 = 16k^2 + 8k + 1 = \underbrace{8(2k^2 + k)}_{k'} + 1 = 8k' + 1$$

$$\begin{aligned} \text{اگر } a = 4k + 3 \Rightarrow a^2 &= 16k^2 + 24k + 9 = 16k^2 + 24k + 8 + 1 \\ &\Rightarrow a^2 = \underbrace{8(2k^2 + 3k + 1)}_t + 1 = 8t + 1 \end{aligned}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال

از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $d \nmid p$ و $d \nmid q$. آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} d|p &\xrightarrow{p \text{ اول است و } d \nmid p} d = p \\ d|q &\xrightarrow{q \text{ اول است و } d \nmid q} d = q \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = q \quad \text{تناقض است}$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم صادق است؛ یعنی $(p, q) = 1$.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

گام اول: تعداد سؤالات ۷ امتیازی که فرد جواب صحیح داده است را x و تعداد سؤالات ۹ امتیازی که فرد جواب صحیح داده است را y در نظر می‌گیریم و معادله سیاله را می‌نویسیم: $7x + 9y = 73$

گام دوم: معادله را به معادله همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$7x \equiv 73 \xrightarrow{73 \equiv 1} 7x \equiv 1 \Rightarrow 7x \equiv 1 + 3 \times 9$$

$$\Rightarrow 7x \equiv 28 \xrightarrow[(9,7)=1]{\div 7} x \equiv 4 \Rightarrow x = 9k + 4$$

گام سوم: $x = 9k + 4$ را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$7(9k + 4) + 9y = 73 \Rightarrow 9y = -63k + 45 \xrightarrow{\div 9} y = -7k + 5$$

گام چهارم: تعداد سؤالاتی پاسخ داده شده نمی‌تواند عددی منفی باشد و نیز عددی صحیح می‌باشد، بنابراین:

$$9k + 4 \geq 0, -7k + 5 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{4}{9}, k \leq \frac{5}{7} \Rightarrow k = 0$$

این شخص تنها به یک صورت توانسته این امتیاز را کسب کند.

$$k = 0 \Rightarrow x = 4, y = 5$$

تنها حالت قابل قبول این است که او به ۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی پاسخ صحیح داده باشد.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

می‌دانیم $a|b \Rightarrow a|mb$

$$a|b \xrightarrow{\text{به توان } m} a^m|b^m \xrightarrow{\times b^{n-m} \text{ طرف راست}} a^m|b^n$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

گام اول: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را y در نظر گرفته و معادله سیاله زیر را می‌نویسیم:

$$3x + 5y = 23$$

گام دوم: معادله سیاله را به معادله همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$3x \equiv 23 \Rightarrow 3x \equiv 3 \xrightarrow[(3,5)=1]{\div 3} x \equiv 1 \Rightarrow x = 5k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم: $x = 5k + 1$ را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \Rightarrow 5y = -15k + 20 \xrightarrow{\div 5} y = -3k + 4; (k \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: چون تعداد وزنه‌ها باید صحیح و نامنفی باشد، داریم:

$$5k + 1 \geq 0, -3k + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \geq -\frac{1}{5}, k \leq \frac{4}{3} \xrightarrow{(k \in \mathbb{Z})} k = 0, 1 \Rightarrow \text{به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

پاسخ سؤالات ۹ تا ۱۲

همه‌نگ کشور ریاضی و فیزیک دوازدهم سه نما ۱۴۰۲

$$p - 1$$

$$a|b \Rightarrow b = aq \xrightarrow{\text{به توان } n} b^n = a^n q^n \xrightarrow{q^n = q'} b^n = a^n q' \Rightarrow a^n | b^n$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته کار در کلاس

$$\left. \begin{array}{l} 5|4k+1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25|16k^2+8k+1 \\ 5|4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25|20k+5 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6$$

نکته: طرفین یک رابطه بخش‌پذیری را می‌توان به توان ۲ رساند و می‌توان در هر عددی ضرب کرد.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

$$\begin{aligned} a \equiv b &\Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | a - b + c - c \\ &\Rightarrow m | (a + c) - (b + c) \Rightarrow a + c \equiv b + c \end{aligned}$$

همه‌نگ کشور ریاضی و فیزیک دوازدهم سه نما ۱۴۰۲