

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۳ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات		
	نمره		

۱ عددی حقیقی مانند  $x$  ارائه کنید به طوری که  $x^3 < x^2$ .

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۲ اگر  $p \neq q$  و  $p$  و  $q$  هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید  $(p, q) = 1$ .

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۳ به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلویی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۴ فرض کنیم  $a \equiv b^m$  ،  $b \equiv c^n$  و  $(m, n) = d$ . در این صورت ثابت کنید  $a \equiv c^d$ .

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

۵ اگر  $a, b, c$  سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال خرداد ۱۳۹۱

۶ اگر عدد طبیعی  $a$ ، دو عدد  $(5k + 9)$  و  $(8k + 13)$  را عاد کند، ثابت کنید:  $a = 1$  یا  $a = 7$ .

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۷ اگر  $k$  عددی صحیح باشد به طوری که  $4 | 3k + 1$ ، ثابت کنید:  $16 | 9k^2 + 18k + 5$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۴

۸ ثابت کنید اگر  $a, b$  دو عدد حقیقی باشند که  $a + b > 0$ ، آنگاه رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال خرداد ۱۳۹۰

می‌دانیم که  $\sqrt{2}$  گنگ است، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$  نیز گنگ می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال شهریور ۱۳۹۱

جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی  $9x + 13y = 7$  را به دست آورید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸



آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضیات گسسته	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی	پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۳ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		
	نمره		

$$x = -1, x = 0/2, x = -2 \text{ و } x = \dots$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم  $d \nmid p$  و  $(p, q) = d$ . آنگاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} d|p \xrightarrow{p \text{ اول است و } d \nmid p} d = p \\ d|q \xrightarrow{q \text{ اول است و } d \nmid q} d = q \end{array} \right\} \Rightarrow p = q \text{ تناقض است}$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم صادق است؛ یعنی  $(p, q) = 1$ .

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

گام اول: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را  $x$  و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را  $y$  در نظر گرفته و معادله سیاله زیر را می‌نویسیم:

$$3x + 5y = 23$$

گام دوم: معادله سیاله را به معادله همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$3x \equiv 23 \pmod{5} \Rightarrow 3x \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{(3,5)=1} x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x = 5k + 1, (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم:  $x = 5k + 1$  را در معادله اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$3(5k + 1) + 5y = 23 \Rightarrow 5y = -15k + 20 \xrightarrow{\div 5} y = -3k + 4; (k \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: چون تعداد وزنه‌ها باید صحیح و نامنفی باشد، داریم:

$$5k + 1 \geq 0, -3k + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \geq -\frac{1}{5}, k \leq \frac{4}{3} \xrightarrow{(k \in \mathbb{Z})} k = 0, 1 \Rightarrow \text{به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

$a \equiv b \pmod{d}$  پس با استفاده از خاصیت تعدی نتیجه می‌شود که  $a \equiv b \pmod{d} \Rightarrow m|a - b$  و  $d|m$ .

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{d|m} a \equiv b \pmod{d} \\ b \equiv c \pmod{n} \xrightarrow{d|n} b \equiv c \pmod{d} \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv c \pmod{d}$$

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته تمرین

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2a + 2b + 2c$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$$

عبارت همواره درست است و بر طبق استدلال برگشتی برقرار می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال خرداد ۱۳۹۱

$$\begin{cases} a|5k+9 \\ a|8k+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a|40k+72 \\ a|40k+64 \end{cases} \Rightarrow a|8 \Rightarrow a=1 \vee a=8$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

روش اول:

$$\begin{cases} 4|3k+1 \Rightarrow 4 \times 4|(4k+1) \Rightarrow 16|12k+4 \\ 4|3k+1 \Rightarrow 4^2|(3k+1)^2 \Rightarrow 16|9k^2+6k+1 \end{cases} \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش دوم:

$$3k+1=4q \Rightarrow \begin{cases} 12k+4=16q \\ 9k^2+6k+1=16q^2 \end{cases} \Rightarrow 9k^2+18k+5=16q'^2 \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش سوم:

$$\begin{cases} 3k+1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 12k+4 \equiv 0 \pmod{16} \\ 9k^2+6k+1 \equiv 0 \pmod{16} \end{cases} \Rightarrow 9k^2+18k+5 \equiv 0 \pmod{16}$$

روش چهارم:

$$4|3k+1 \Rightarrow 4|3k+5 \Rightarrow 16|(3k+1)(3k+5) \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش پنجم:

$$3k+1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow 3k+5 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow (3k+1)(3k+5) \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۴



$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} \geq ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq (a + b)ab \Leftrightarrow (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

بر طبق استدلال بازگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال خرداد ۱۳۹۰

$\sqrt{2}$  گنگ است : فرض

حکم :  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$  گنگ است :

گویا باشد  $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = a$  : فرض خلف

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2} = a^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = a^3 - 1 \quad \begin{matrix} \text{گویا} \\ \text{گنگ} \end{matrix}$$

تفریق دو عدد گویا همواره گویا است (این تناقض نشان می‌دهد که خلاف حکم برقرار نمی‌باشد).

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک سوم جبر و احتمال شهریور ۱۳۹۱

$$13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16) \Rightarrow 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,9)=1} y \equiv 4$$

$$y = 9k + 4, 9x = 7 - 13(9k + 4) = -117k - 45 \Rightarrow x = -13k - 5$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸