آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۹ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

ریاضیات گسسته

۱ رقم یکان عدد $(۷ + ۲^{۱۱})$ را به دست آورید.

۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

۳ هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال، نقض کنید.

الف برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n + ۱$ اول است.

۴ یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

۵ ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a + b > ۰$، آنگاه رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^۳ + b^۳}{a + b} \geq ab$$

۶ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجهٔ گراف باشد:

الف گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ است.

ب گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ باشد.

۷ اگر $a|b$ و $c|d$ نشان دهید که: $ac|bd$

۸ ۳۱ اردیبهشت در یک سال پنج‌شنبه است. ۶ تیر در آن سال چه روزی است؟

۹ اگر k عددی صحیح باشد به‌طوری‌که $۴|۳k+۱$، ثابت کنید: $۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$

۱۰ باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^۲+a$ بر ۷۷ را به دست آورید.

۱۱ معادلهٔ $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۲ در یک گراف ۴− منتظم رابطه $۲q - ۳p = ۹$ بین مرتبه و اندازه گراف برقرار است p و q را بیابید.

۱۳ گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۱۲ و اندازهٔ ۶۰ است. مشخص کنید بیشترین مقداری که $\Delta - \delta$ می‌تواند داشته باشد چه عددی است.

۱۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم a، b و c بر ۱۱ به ترتیب ۸، ۹ و ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $ab + ac + bc$ بر ۱۱ را به دست آورید.

۱۵ a یک عدد طبیعی است که مضرب ۸ نیست ولی مضرب ۴ است. بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک $\frac{a^۲}{۲} + ۲۴$ و ۱۲۸ را به دست آورید.

۱۶ اگر $۷a|b$ و $b^۴|c$، نشان دهید که $a|c^۵$.

۱۷ علی، احمد، رضا، محمد و حسین را در نظر بگیرید. علی با احمد و محمد آشنا است، احمد با حسین و رضا و رضا نیز با محمد آشنا است. اگر محمد نیز با احمد و حسین دوست باشد، حلقه‌های آشنایی این نفرات را مشخص کنید.

۱۸ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(n-۳)^۵ + (n-۲)^۵ + (n-۱)^۵ + n^۵ \overset{۴}{\equiv} ?$$

۱۹ ثابت کنید به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۸n+۱} + ۲^{۴n+۱} + ۱$ بر ۱۷ برابر ۱ یا ۵ است.

۲۰ چند عدد طبیعی دورقمی مانند n هست که $۱۲۶ | ۵۵^n + ۱۱^n$؟

۲۱ چند جفت عدد طبیعی وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر ۲۲۴ و ب.م.م آن‌ها ۱۴ باشد؟

۲۲ در یک گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ ۹، عدد احاطه‌گری چه مقادیری می‌تواند اختیار کند؟ (با ذکر دلیل)

۲۳ جواب عمومی معادلهٔ هم‌نهشتی $7x \overset{5}{\equiv} 3$ را به دست آورید.

۲۴ اگر در یک تقسیم ۱۲۰ واحد به مقسوم و ۳ واحد به مقسوم‌علیه افزوده شود، خارج‌قسمت تغییر نمی‌کند اما از باقی‌مانده ۶ واحد کم می‌شود. خارج‌قسمت تقسیم را بیابید.

۲۵ یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۶ اگر عدد طبیعی a بر ۴ بخش‌پذیر نباشد اما زوج باشد، بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک $a^{۲} + ۱۲$ و ۴۸ را بیابید.

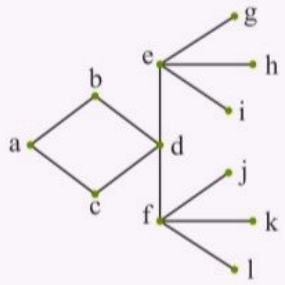
۲۷ یک دستگاه بسته‌بندی شکر دارای سه خروجی برای بسته‌بندی است. در خروجی اول کیسه‌های ۰/۵ کیلویی، در خروجی دوم کیسه‌های ۱ کیلویی و در خروجی سوم کیسه‌های ۱/۵ کیلویی تولید می‌شوند. شکر خروجی به ترتیب در مسیرهای ۱، ۲ و ۳ قرار می‌گیرد. مشخص کنید ۱۹۷/۲اُمین کیلوی شکر در چه نوع بسته‌بندی قرار می‌گیرد؟

۲۸ گراف سادهٔ G از مرتبهٔ ۹ و اندازهٔ ۲۰ است. این گراف حداکثر چند رأس ایزوله می‌تواند داشته باشد؟

۲۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد a و b بر ۱۹ به‌ترتیب ۷ و ۵ شده است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۴a + ۳b + ۲$ را بر ۱۹ بیابید.

۳۰ مشخص کنید در گراف کامل $K_{۹}$ چند مسیر به طول ۶ بین a و b هست که شامل یال cd باشد اما یال de را نداشته باشد.

۳۱ گراف زیر را در نظر بگیرید:



الف عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.

۳۲ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه به‌دلخواه انتخاب کرد؟

۳۳ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را به دست آورید.

۳۴ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

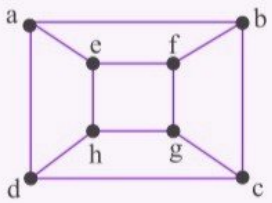
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۵ اگر $a, b \in \mathbb{R}$، کدام‌یک از ترکیب‌های دوشرطی زیر درست است؟

الف) $a = b \Leftrightarrow a^{۳} = b^{۳}$

ب) $a = b \Leftrightarrow a^{۲} = b^{۲}$

۳۶ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.



۳۷ باقی‌مانده تقسیم $۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳}$ بر ۷ را به دست آورید.

۳۸ به ازای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید.

$$x^{۲} + y^{۲} + ۱ \geq xy + x + y$$

۳۹ گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G) = \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵, v_۶, v_۷\}$ مفروض است. اگر $N_G(v_۱)$ دارای ۵ عضو و $N_G[v_۲]$ دارای ۳ عضو باشد و مجموعه‌های $N_G(v_i)$ برای $۳ \leq i \leq ۷$ تک‌عضوی باشند، گراف G را رسم کنید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۴۰ اولین عدد سه‌رقمی a که معادلهٔ $۶x \overset{۸}{\equiv} ۳a + ۲$ به ازای آن جواب دارد را بیابید.

۴۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۹ و ۱۰ به ترتیب ۷ و ۳ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۰ را بیابید.

۴۲ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۵)$ را بر ۸ بیابید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

ردیف	پاسخنامه	نمره

ریاضیات گسسته

۱

$$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$$

رقم یکان برابر ۵ است.

۲

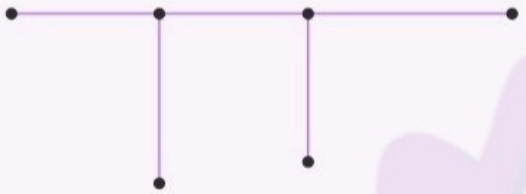
می‌دانیم $۱! \overset{۱۵}{\equiv} ۱$، $۲! \overset{۱۵}{\equiv} ۲$، $۳! \overset{۱۵}{\equiv} ۶$، $۴! \overset{۱۵}{\equiv} ۹$، $۵! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ و ... و $۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$؛ پس داریم:

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

۳

الف نادرست، مثال نقض $n = ۳$

۴



۵

$$\frac{a^۳ + b^۳}{a + b} \geq ab \Leftrightarrow a^۳ + b^۳ \geq (a + b)\,ab \Leftrightarrow (a + b)\left(a^۲ - ab + b^۲\right) \geq (a + b)\,ab$$

$$\Leftrightarrow a^۲ - ab + b^۲ \geq ab \Leftrightarrow (a - b)^۲ \geq ۰$$

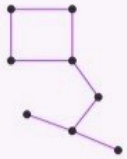
بر طبق استدلال بازگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است.

۶

الف برای مثال اگر $n = ۱۰$، رسم $C_{۱۰}$ یا $P_{۱۰}$. در این گراف‌ها:

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil = ۴$$

ب در گرافی مشابه



$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = ۲$ ولی $\gamma(G) = ۳$ است.

۷ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{matrix} a|b \Rightarrow b = aq_۱ \\ c|d \Rightarrow d = cq_۲ \end{matrix} \Rightarrow b \times d = aq_۱ \times cq_۲ \Rightarrow b \times d = (a \times c)\, q_۱ q_۲ \Rightarrow bd = ac.q'$$

پس $ac|bd$.

۸ ابتدا مشخص می‌کنیم ۳۱ اردیبهشت چندمین روز سال است.

$۳۱ \text{ اردیبهشت} = ۲ \times ۳۱ = ۶۲$

باقی‌ماندهٔ تقسیم ۶۲ بر ۷ برابر است با ۶، پس جدول روزهای هفته و باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۷ به‌صورت زیر است:

چهارشنبه	سه‌شنبه	دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج‌شنبه
۵	۴	۳	۲	۱	۰	۶

حال مشخص می‌کنیم ۶ تیر چندمین روز سال است:

$۶ \text{ تیر} = ۳ \times ۳۱ + ۶ = ۹۳ + ۶ = ۹۹$

باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۷ برای عدد ۹۹ برابر ۱ است، پس ۶ تیر شنبه خواهد بود.

۹ روش اول:

$$\begin{cases} ۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴\times ۴|۴(۴k+۱) \Rightarrow ۱۶|۱۲k+۴ \\ ۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴^۲|(۳k+۱)^۲ \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۶k+۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش دوم:

$$۳k+۱=۴q \Rightarrow \begin{cases} ۱۲k+۴=۱۶q \\ ۹k^۲+۶k+۱=۱۶q^۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۹k^۲+۱۸k+۵=۱۶q' \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش سوم:

$$\begin{cases} ۳k+۱ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۲k+۴ \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \\ ۹k^۲+۶k+۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \end{cases} \Rightarrow ۹k^۲+۱۸k+۵ \overset{۱۶}{\equiv} ۰$$
$$۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش چهارم:

$$۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴|۳k+۵ \Rightarrow ۱۶|(۳k+۱)(۳k+۵) \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش پنجم:

$$۳k+۱ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳k+۵ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow (۳k+۱)(۳k+۵) \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

۱۰ برای حل مسئله بهترین راه همنهشتی است. اطلاعات مسئله در مورد a به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} a \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow a \overset{۷}{\equiv} -۲ \\ a \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۱a \overset{۷۷}{\equiv} -۲۲ \\ ۷a \overset{۷۷}{\equiv} ۲۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۲a \overset{۷۷}{\equiv} -۴۴ \\ ۲۱a \overset{۷۷}{\equiv} ۶۳ \end{cases}$$

پس:

$$۲۲a-۲۱a \overset{۷۷}{\equiv} -۴۴-۶۳ \Rightarrow a \overset{۷۷}{\equiv} -۱۰۷ \Rightarrow a \overset{۷۷}{\equiv} -۳۰$$

حال $a^۲+a$ را می‌سازیم:

$$a \overset{۷۷}{\equiv} -۳۰ \Rightarrow a^۲ \overset{۷۷}{\equiv} ۹۰۰ \Rightarrow \begin{cases} a^۲ \overset{۷۷}{\equiv} ۵۳ \\ a \overset{۷۷}{\equiv} -۳۰ \end{cases} \Rightarrow a^۲+a \overset{۷۷}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow r=۲۳$$

۱۱

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴\times ۵+۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{(۷,۴)=۱}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۴k+۳$$

۱۲ در گراف ۴− منتظم داریم:

$$q = \frac{pk}{۲} \Rightarrow q = ۲p \Rightarrow ۲q - ۳p = ۹ \Rightarrow ۴p - ۳p = ۹ \Rightarrow p = ۹$$
$$q = ۲p \Rightarrow q = ۱۸$$

۱۳ اگر گراف G را کامل فرض کنیم، می‌تواند ۶۶ یال داشته باشد؛ زیرا:

$$q = \frac{۱۲ \times ۱۱}{۲} = ۶۶$$

اما گراف موجود ۶۰ یال دارد که ۶ یال کمتر از گراف کامل است. برای اینکه $\Delta - \delta$ بیشترین مقدار ممکن شود، باید فاصلهٔ Δ و δ زیاد شود؛ پس ۶ یال را از ۱ رأس برمی‌داریم. در این حالت داریم:

$$\begin{cases} \delta = ۱۱ - ۶ = ۵ \\ \Delta = ۱۱ \end{cases} \Rightarrow \Delta - \delta = ۱۱ - ۵ = ۶$$

۱۴ از همنهشتی استفاده می‌کنیم. اطلاعات مسئله در مورد a، b و c به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} a \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \Rightarrow a \overset{۱۱}{\equiv} -۳ \\ b \overset{۱۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow b \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \\ c \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \\ ac \overset{۱۱}{\equiv} -۹ \Rightarrow ac \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \\ bc \overset{۱۱}{\equiv} -۶ \Rightarrow bc \overset{۱۱}{\equiv} ۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ab + ac + bc \overset{۱۱}{\equiv} ۶ + ۲ + ۵$$

پس:

$$ab + ac + bc \overset{۱۱}{\equiv} ۱۳ \Rightarrow ab + ac + bc \overset{۱۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$$

۱۵ اگر a مضرب ۸ نباشد ولی مضرب ۴ باشد به‌شکل $۸k + ۴$ است. پس:

$$a = ۸k + ۴ \Rightarrow a^۲ = ۶۴k^۲ + ۶۴k + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۶۴k(k + ۱) + ۱۶$$

چون $k(k + ۱)$ حاصلضرب دو عدد متوالی است پس زوج است، یعنی:

$$a^۲ = ۶۴ \times ۲t + ۱۶ \Rightarrow a^۲ = ۱۲۸t + ۱۶ \Rightarrow \frac{a^۲}{۲} = ۶۴t + ۸ \Rightarrow \frac{a^۲}{۲} + ۲۴ = ۶۴t + ۳۲$$
$$\Rightarrow \frac{a^۲}{۲} + ۲۴ = ۳۲(۲t + ۱)$$

پس:

$$(\frac{a^۲}{۲} + ۲۴, ۱۲۸) = (۳۲(۲t + ۱), ۳۲ \times ۴) = ۳۲(۲t + ۱, ۴)$$

چون $۲t + ۱$ فرد است، پس:

$$(۲t + ۱, ۴) = ۱ \Rightarrow d = ۳۲ \times ۱ = ۳۲$$

۱۶ برای بررسی مسئله به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l}\text{می‌دانیم که} \Rightarrow a|7a \\ \text{رابطهٔ مسئله} \Rightarrow 7a|b\end{array} \xrightarrow{\text{طبق تعدی}} a|b$$

از رابطهٔ فوق به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$a|b \Rightarrow \begin{array}{l}a|b^4 \\ b^4|c\end{array} \Rightarrow a|c \Rightarrow a|c^5$$

۱۷ ابتدا گراف متناظر را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم. مسلماً حلقه‌های دوستی همان دورهای موجود است.

$$\Rightarrow \text{حلقه‌های دوستی} \Rightarrow \begin{cases}\text{دور به طول ۳} \Rightarrow \begin{cases}\text{علی احمد محمد} \\ \text{محمد احمد رضا} \\ \text{حسین احمد محمد}\end{cases} \\ \text{دور به طول ۴} \Rightarrow \begin{cases}\text{علی احمد محمد رضا} \\ \text{حسین احمد محمد رضا} \\ \text{رضا احمد محمد حسین}\end{cases}\end{cases}$$

۱۸ n، $n-1$، $n-2$ و $n-3$ چهار عدد متوالی‌اند، بنابراین باقی‌ماندهٔ آن‌ها در تقسیم بر ۴، چهار عدد صفر، ۱، ۲ و ۳ است، درنتیجه:

$$(n-3)^5+(n-2)^5+(n-1)^5+(n)^5 \overset{4}{\equiv} 0^5+1^5+2^5+3^5$$

$$\overset{4}{\equiv} 0+1+\cancel{32}^{\,0}+3^5 \overset{4}{\equiv} 1+(81\times 3) \overset{4}{\equiv} 1+(1\times 3) \overset{4}{\equiv} 4 \overset{4}{\equiv} 0$$

۱۹ باید اثبات کنیم عبارت فوق در پیمانهٔ ۱۷ هم‌نهشت با ۱ یا ۵ است. پایهٔ ۲ را در نظر می‌گیریم و در پیمانهٔ ۱۷ بررسی می‌کنیم.

$$2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^4)^{2n} \overset{17}{\equiv} (-1)^{2n} \Rightarrow 2^{8n} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{8n}\times 2^1 \overset{17}{\equiv} 1\times 2^1 \Rightarrow 2^{8n+1} \overset{17}{\equiv} 2$$

$$2^4 \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow (2^4)^{n} \overset{17}{\equiv} (-1)^{n} \Rightarrow \begin{cases}\text{اگر } n \text{ زوج باشد} \Rightarrow 2^{4n} \overset{17}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{4n+1} \overset{17}{\equiv} 2 \\ \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \Rightarrow 2^{4n} \overset{17}{\equiv} -1 \Rightarrow 2^{4n+1} \overset{17}{\equiv} -2\end{cases}$$

پس:

$$\text{اگر } n \text{ زوج باشد} \Rightarrow 2^{8n+1}+2^{4n+1}+1 \overset{17}{\equiv} 2+2+1 \overset{17}{\equiv} 5$$

$$\text{اگر } n \text{ فرد باشد} \Rightarrow 2^{8n+1}+2^{4n+1}+1 \overset{17}{\equiv} 2-2+1 \overset{17}{\equiv} 1$$

۲۰ برای به دست آوردن اعداد طبیعی که در رابطهٔ مسئله صدق کند، به‌صورت زیر مسئله را ساده می‌کنیم.

$$۱۲۶|۵۵^n + ۱۱^n \Rightarrow ۱۲۶|۵^n \times ۱۱^n + ۱۱^n \Rightarrow ۱۲۶|۱۱^n(۵^n + ۱) \Rightarrow ۱۲۶|۵^n + ۱$$

$$\Rightarrow ۵^n + ۱ = ۱۲۶q \Rightarrow ۵^n + ۱ = (۱۲۵ + ۱)q \Rightarrow ۵^n + ۱ = (۵^۳ + ۱)q \Rightarrow (۵^۳)^{\frac{n}{۳}} + ۱ = (۵^۳ + ۱)q$$

مقایسهٔ رابطه فوق با اتحاد زیر:

$$a^m + ۱ = (a + ۱)(a^{m-۱} - a^{m-۲} + ...)$$

نشان می‌دهد که m یعنی $\frac{n}{۳}$ باید فرد باشد. بنابراین:

$$\frac{n}{۳} = ۲k + ۱ \Rightarrow n = ۶k + ۳$$

پس:

$$۱۰ \leq ۶k + ۳ \leq ۹۹ \Rightarrow ۷ \leq ۶k \leq ۹۶ \Rightarrow \frac{۷}{۶} \leq k \leq \frac{۹۶}{۶} \Rightarrow ۲ \leq k \leq ۱۶$$

یعنی تعداد اعداد دورقمی برابر است با:

$$\text{تعداد} = ۱۶ - ۲ + ۱ = ۱۵$$

۲۱ دو عدد موردنظر را a و b در نظر می‌گیریم. داریم:

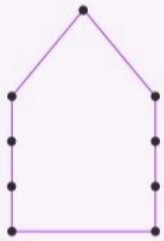
$$(a, b) = d\ ,\ a = a'd\ ,\ b = b'd\ ,\ (a', b') = ۱$$

$$a + b = ۲۲۴ \Rightarrow ۱۴a' + ۱۴b' = ۲۲۴ \Rightarrow a' + b' = ۱۶$$

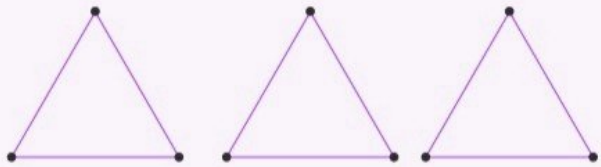
$$(a', b') = ۱ \Rightarrow \{a', b'\} = \{۱, ۱۵\}\text{یا}\{۳, ۱۳\}\text{یا}\{۵, ۱۱\}\text{یا}\{۷, ۹\}$$

بنابراین ۴ جفت داریم.

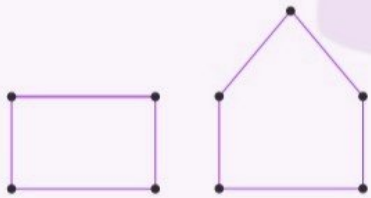
۲۲ عدد احاطه‌گری آن ۳ و ۴ خواهد بود. زیرا:



$C_۹$: عدد احاطه‌گری $= \left\lceil \frac{۹}{۳} \right\rceil = ۳$



عدد احاطه‌گری $= \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۳}{۳} \right\rceil = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$



عدد احاطه‌گری $= \left\lceil \frac{۴}{۳} \right\rceil + \left\lceil \frac{۵}{۳} \right\rceil = ۲ + ۲ = ۴$

۲۳ ابتدا شرط جواب معادله را بررسی می‌کنیم:

$(۷, ۵) | ۳ \Rightarrow ۱ | ۳$

پس معادله جواب دارد. برای حل، طرف دوم را با ۲۵ جمع می‌کنیم تا بتوانیم آن را تقسیم بر ۷ کنیم؛ یعنی:

$۷x \overset{۵}{\equiv} ۳ + ۲۵ \Rightarrow ۷x \overset{۵}{\equiv} ۲۸$

چون $(۷, ۵) = ۱$، پس:

$\frac{۷x}{۷} \overset{\frac{۵}{۱}}{\equiv} \frac{۲۸}{۷} \Rightarrow x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۴$

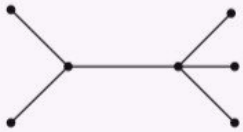
۲۴ رابطهٔ تقسیم را به‌صورت $a = bq + r$ در نظر می‌گیریم و تغییرات را در آن اعمال می‌کنیم:

$$a + ۱۲۰ = (b + ۳)q + r - ۶$$

از رابطهٔ اولیهٔ تقسیم، a را جایگذاری می‌کنیم:

$$bq + r + ۱۲۰ = bq + ۳q + r - ۶ \Rightarrow ۳q = ۱۲۶ \Rightarrow q = \frac{۱۲۶}{۳} \Rightarrow q = ۴۲$$

۲۵



۲۶ اگر a بر ۴ بخش‌پذیر نباشد اما زوج باشد، به‌شکل $۴k + ۲$ خواهد بود، پس:

$$a = ۴k + ۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶k^۲ + ۱۶k + ۴ \Rightarrow a^۲ = ۱۶k(k + ۱) + ۴$$

چون $k(k + ۱)$ حاصلضرب دو عدد متوالی است پس حتماً زوج است، یعنی:

$$a^۲ = ۱۶ \times ۲t + ۴ \Rightarrow a^۲ = ۳۲t + ۴ \Rightarrow a^۲ + ۱۲ = ۳۲t + ۱۶ \Rightarrow a^۲ + ۱۲ = ۱۶(۲t + ۱)$$

نکته:

$$(ac, bc) = dc \Rightarrow (a, b) = d$$

بنابراین:

$$(a^۲ + ۱۲, ۴۸) = (۱۶(۲t + ۱), ۱۶ \times ۳) = ۱۶(۲t + ۱, ۳)$$

پس دو حالت برای عدد فرد $۲t + ۱$ رخ می‌دهد.
الف) اگر $۲t + ۱$ عدد فرد باشد و مضرب ۳ نباشد:

$$(۲t + ۱, ۳) = ۱ \Rightarrow d = ۱۶ \times ۱ = ۱۶$$

ب) اگر $۲t + ۱$ عددی فرد و مضرب ۳ باشد:

$$(۲t + ۱, ۳) = ۳ \Rightarrow d = ۱۶ \times ۳ = ۴۸$$

۲۷ مفهومی از هم‌نهشتی در جریان است. در هر دور $۳ = ۱/۵ + ۱ + ۰/۵$ کیلو شکر در حال بسته‌بندی است. اگر ۱۹۷/۲ را بر ۳ تقسیم کنیم داریم:

$$۱۹۷/۲ = ۶۵ \times ۳ + ۲/۲$$

یعنی ۶۵ سری بسته‌های ۰/۵، ۱ و ۱/۵ کیلویی پر شده و ۲/۲ کیلوی بعدی در حال پرشدن است که ۰/۵ کیلوی آن در کیسهٔ اول، یک کیلوی آن در کیسهٔ دوم پر شده و باقی‌مانده در حال پرشدن در کیسهٔ ۱/۵ کیلویی است.

۲۸ برای اینکه تعداد بیشتری رأس ایزوله داشته باشیم، لازم است ۲۰ یال موجود در حداقل رئوس جایگذاری شوند. می‌دانیم در ۷ رأس می‌توانیم $q = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$ یال جا دهیم؛ پس تمام ۲۰ یال را در ۷ رأس جا می‌دهیم و ۲ رأس از ۹ رأس ایزوله می‌ماند؛ یعنی حداکثر ۲ رأس ایزوله وجود دارد.

۲۹ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۹ برابر با ۷ است، پس:

$$a = ۱۹q + ۷ \Rightarrow ۴a = ۱۹ \times ۴q + ۲۸$$

و چون باقی‌ماندهٔ تقسیم b بر ۱۹ برابر ۵ است، پس:

$$b = ۱۹q' + ۵ \Rightarrow ۳b = ۱۹ \times ۳q' + ۱۵$$

طرفین روابط فوق را باهم جمع می‌کنیم:

$$۴a + ۳b = (۱۹ \times ۴q + ۲۸) + (۱۹ \times ۳q' + ۱۵) \Rightarrow ۴a + ۳b = ۱۹ \times ۴q + ۱۹ \times ۳q' + ۴۳$$

$$۴a + ۳b + ۲ = ۱۹ \times ۴q + ۱۹ \times ۳q' + ۴۵ \Rightarrow ۴a + ۳b + ۲ = ۱۹ \times ۴q + ۱۹ \times ۳q' + ۳۸ + ۷$$

$$\Rightarrow ۴a + ۳b + ۲ = ۱۹(۴q + ۳q' + ۲) + ۷ \Rightarrow ۴a + ۳b + ۲ = ۱۹q'' + ۷$$

یعنی $r = ۷$ است.

۳۰ رئوس گراف $K_۹$ را به‌صورت $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ در نظر می‌گیریم. مسیر موردنظر به‌صورت زیر است:

$$a \underbrace{- - - - - -}_{\text{cd باشد و de نباشد}} b$$

بهتر است مسئله از متمم حل شود. ابتدا مسیرهایی که شامل cd و رأس e هست را حساب می‌کنیم.

$$a\,\underline{cd}e\;b \Rightarrow \binom{۴}{۲} \times ۴! \times ۲! = ۶ \times ۲۴ \times ۲ = ۲۸۸$$

حال مسیرهایی را حساب می‌کنیم که شامل یال cd و de باشد.

$$a\,\underline{cde}\;b \Rightarrow \binom{۴}{۲} \times ۳! \times \underset{\text{جابه‌جایی c,e}}{۲} = ۶ \times ۶ \times ۲ = ۷۲$$

پس $۲۸۸ - ۷۲ = ۲۱۶$ مسیر هست.

۳۱ الف

$$\gamma(G) \geq [\frac{p}{\Delta + ۱}] \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳ \;\; (\star)$$

ازطرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، بنا به رابطهٔ (*) پس: $\gamma(G) = ۳$

ب

$$B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$$

پ

$C = \{a, e, f, b\}$

۳۲ گام اول: تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y در نظر گرفته و معادلهٔ سیاله را می‌نویسیم: $x + y = ۹$

گام دوم: معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$x \overset{۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow x = k + ۹ \ ; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: $x = k + ۹$ را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$k + ۹ + y = ۹ \Rightarrow y = -k \ ; k \in \mathbb{Z}$$

گام چهارم: چون تعداد گل‌ها نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$k + ۹ \geq ۰ , \ -k \geq ۰ \Rightarrow k \geq -۹ , \ k \leq ۰$$

$$\Rightarrow -۹ \leq k \leq ۰ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۰$$

بنابراین به ۱۰ طریق این عمل ممکن است.

۳۳

$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴$$

$$y = ۹k + ۴, ۹x = ۷ - ۱۳(۹k + ۴) = -۱۱۷k - ۴۵ \Rightarrow x = -۱۳k - ۵$$

۳۴ گام اول: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را y در نظر گرفته و معادلهٔ سیالهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$۳x + ۵y = ۲۳$$

گام دوم: معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۵k + ۱ , (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم: $x = ۵k + ۱$ را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$۳(۵k + ۱) + ۵y = ۲۳ \Rightarrow ۵y = -۱۵k + ۲۰ \xrightarrow{\div ۵} y = -۳k + ۴ \ ; (k \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: چون تعداد وزنه‌ها باید صحیح و نامنفی باشد، داریم:

$$۵k + ۱ \geq ۰ , \ -۳k + ۴ \geq ۰$$

$$\Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۵} , \ k \leq \frac{۴}{۳} \xrightarrow{(k \in \mathbb{Z})} k = ۰, ۱ \Rightarrow$$ به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد

۳۵ الف) برای اینکه $p \Leftrightarrow q$ درست باشد، باید $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ درست باشند، طرفین یک معادله را می‌توان به توان دلخواه رساند.

$$a = b \Rightarrow a^{۳} = b^{۳} \quad \checkmark$$

از طرفین معادله می‌توان ریشهٔ سوم گرفت:

$$a^{۳} = b^{۳} \Rightarrow a = b \quad \checkmark$$

بنابراین این ترکیب دوشرطی درست است.

ب) ارزش گزاره نادرست است، زیرا $a^{۲} = b^{۲} \Rightarrow a = b$ نادرست است. چون داریم:

$$a^{۲} = b^{۲} \Rightarrow |a| = |b|$$

از مثال نقض هم می‌توان برای رد این گزاره استفاده کرد. $a = ۲$ و $b = -۲$ مثال نقض برای این گزاره است.

۳۶ باتوجه‌به $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ داریم $\gamma(G) \geq ۲$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است (۰/۲۵). از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq ۲$ (۰/۲۵)، درنتیجه $\gamma(G) = ۲$ (عدد احاطه‌گری)(۰/۲۵).

۳۷ می‌توان نوشت:

$$۲^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۸ \overset{۷}{\equiv} ۸ - ۷ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^{۳})^{۸} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$۳^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۲۷ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ - ۷ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۳^{۳})^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۳۱} \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$۵^{۲} \overset{۷}{\equiv} ۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۲۵ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۵ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۲۰ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^{۳})^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۵$$

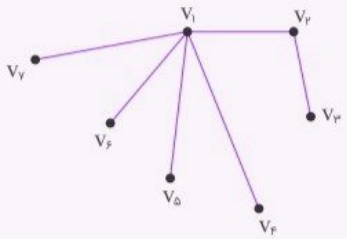
درنتیجه:

$$۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۶ + ۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

۳۸ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
& x^{۲} + y^{۲} + ۱ \geq xy + x + y \\
& \Leftrightarrow ۲x^{۲} + ۲y^{۲} + ۲ \geq ۲xy + ۲x + ۲y \\
& \Leftrightarrow (x^{۲} - ۲xy + y^{۲}) + (x^{۲} - ۲x + ۱) + (y^{۲} - ۲y + ۱) \geq ۰ \\
& \Leftrightarrow (x - y)^{۲} + (x - ۱)^{۲} + (y - ۱)^{۲} \geq ۰ \quad \text{همواره درست است.}
\end{aligned}$$

۳۹



همسایگی باز رأس v_1 دارای ۵ عضو است، یعنی درجهٔ رأس v_1 برابر ۵ است. به همین ترتیب درجهٔ رأس v_2 برابر ۲ است و درجهٔ رأس‌های v_3 ، v_4 ، v_5 ، v_6 و v_7 نیز برابر یک است.

توجه کنید که $N_G[v_2]$ همسایگی بستهٔ رأس v_2 است، یعنی درجهٔ v_2 برابر ۲ است.

۴۰ شرط وجود جواب برای معادلهٔ داده‌شده به‌صورت زیر است:

$$(6,8)|3a+2 \Rightarrow 2|3a+2 \Rightarrow 3a+2 \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow 3a \overset{2}{\equiv} -2$$

$$\Rightarrow 3a \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow a \overset{2}{\equiv} 0 \Rightarrow a = 2k \xrightarrow{k=50} a = 100$$

۴۱ چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹ برابر ۷ است، پس: $a = 9q + 7$

و چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۰ برابر ۳ است، پس: $a = 10q' + 3$

از روابط فوق در دستگاه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 9q + 7 \\ a = 10q' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = 90q + 70 \\ 9a = 90q' + 27 \end{cases} \Rightarrow 10a - 9a = (90q + 70) - (90q' + 27)$$

$$\Rightarrow a = 90q - 90q' + 42 \Rightarrow a = 90(q - q') + 42 \Rightarrow a = 90q'' + 42$$

یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۹۰ برابر ۴۲ است.

۴۲ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $8k + 1$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^2 = 8k + 1 \\ b^2 = 8k' + 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \Rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 8k'' + 7$$

$$\Rightarrow r = 7$$