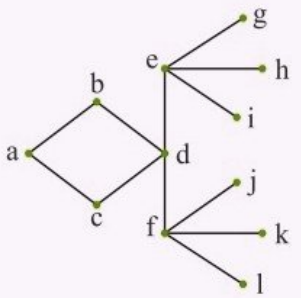
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۷ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	سوالات	نمره

ریاضیات گسسته

۱ اگر $p \neq q$ و p و q هر دو عدد اول باشند، ثابت کنید $(p, q) = ۱$.

۲ گراف زیر را در نظر بگیرید:



الف عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.

۳ رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۴ یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۵ باقی‌مانده تقسیم $۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳}$ بر ۷ را به‌دست آورید.

۶ اگر k عددی صحیح باشد به‌طوری‌که $۴|۳k + ۱$، ثابت کنید: $۱۶|۹k^{۲} + ۱۸k + ۵$

۷ به چند طریق می‌توان از بین دو نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه به‌دلخواه انتخاب کرد؟

۸ به چند طریق می‌توان یک کیسهٔ ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۳ و ۵ کیلویی وزن کرد؟

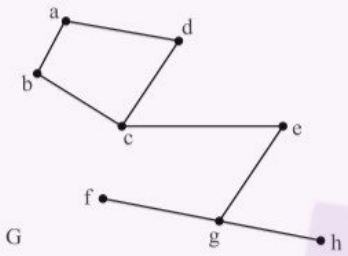
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

پاسخ هریک از سؤالات زیر را به دست آورده و دلیل پاسخ خود را به‌طور کامل بنویسید.

۹ اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b|a+۲$ در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $a^۲+b^۲+۳$ را بر $\underline{۸}$ بیابید.

۱۰ مطلوب است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=(۱۰۰۰)^{۱۳}\times ۱۲+۱۰$ بر عدد $\underline{۷}$.

۱۱ گراف G را در نظر بگیرید:



الف عدد احاطه‌گری گراف G را به‌دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید.

۱۲ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[۲۱a^۲, ۳۵a^۳]$ را به دست آورید.

۱۳ معادلهٔ $۷x\overset{۴}{\equiv}۱$ را حل کنید.

۱۴ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۹x+۱۳y=۷$ را به دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۵ باقی‌مانده تقسیم $۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳}$ بر ۷ را به دست آورید.

۱۶ شخصی در یک مسابقهٔ علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۷ امتیازی و ۹ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۷۳ امتیاز کسب کرده است. این شخص به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را به دست آورد؟ (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)

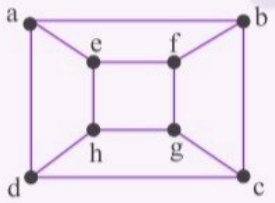
جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۷ اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۹k - ۳۰۰$ بر ۱۹ برابر با ..... است.

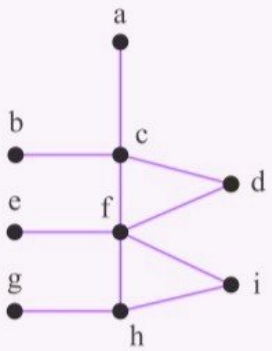
۱۸ اگر a، b و c عددی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$، دراین‌صورت حاصل عبارت $([a , b] , [a , c])$ برابر ..... است.

۱۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

۲۰ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.



۲۱ در گراف زیر:



الف مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید.

پ با اضافه نمودن چه یالی، عدد احاطه‌گری گراف، ۲ می‌شود؟

۲۲ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۵)$ را بر ۸ بیابید.

۲۳ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۵m + ۴)$ و $(۶m + ۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

۲۴ برای هر سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید:

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz$$

۲۵ اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{a}{b^۲} + \frac{b}{a^۲} \geq \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۶ ثابت کنید اگر a, b دو عدد حقیقی باشند که $a + b > ۰$، آنگاه رابطهٔ زیر برقرار می‌باشد.

$$\frac{a^۳ + b^۳}{a + b} \geq ab$$

۲۷ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۲۸ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶ و ۷ به ترتیب ۱ و ۳ است. باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۲۱ را به دست آورید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۲۹ گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف ..... می‌گوییم.

۳۰ تعداد رئوس فرد هر گراف عددی ..... است.

۳۱ مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبهٔ p برابر ..... است.

۳۲ گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف ..... می‌گوییم.

۳۳ اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۵a + ۴, ۲a + ۳)$ را به دست آورید.

۳۴ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۳۵ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$، ثابت کنید: $(p, a) = ۱$.

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **ریاضیات گسسته**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۷ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

ردیف	پاسخنامه	نمره

ریاضیات گسسته

۱ از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $d \neq ۱$ و $(p, q) = d$. آنگاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} d|p \xrightarrow{\text{p اول است و } d\neq ۱} d = p \\ d|q \xrightarrow{\text{q اول است و } d\neq ۱} d = q \end{array}\right\} \Rightarrow p = q \quad \text{تناقض است}$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم صادق است؛ یعنی $(p, q) = ۱$.

۲ الف

$$\gamma(G) \geq [\frac{p}{\Delta + ۱}] \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳ \quad (\star)$$

ازطرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، بنا به رابطهٔ $(*)$ پس: $\gamma(G) = ۳$

ب

$$B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$$

پ

$$C = \{a, e, f, b\}$$

۳

$$۲^۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۲^{۱۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^۲ \Rightarrow ۲^{۱۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۸ \Rightarrow ۲^{۱۱} + ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۱۵ \overset{۱۰}{\equiv} ۵$$

رقم یکان برابر ۵ است.

۴

۵ می‌توان نوشت:

$$۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۸ \overset{۷}{\equiv} ۸ - ۷ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۳)^۸ \overset{۷}{\equiv} ۱$$
$$\Rightarrow ۲^{۲۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$۳^۳ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ - ۷ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} -۱$$
$$\Rightarrow (۳^۳)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} ۱$$
$$\Rightarrow ۳^{۳۱} \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$۵^۲ \overset{۷}{\equiv} ۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۲۵ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} ۴$$
$$\Rightarrow ۵^۳ \overset{۷}{\equiv} ۵ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۲۰ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} -۱$$
$$\Rightarrow (۵^۳)^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۵$$

در نتیجه:

$$۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۶ + ۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

۶ روش اول:

$$\begin{cases} ۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴ \times ۴|۴(۴k+۱) \Rightarrow ۱۶|۱۲k+۴ \\ ۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴^۲|(۳k+۱)^۲ \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۶k+۱ \end{cases} \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش دوم:

$$۳k+۱ = ۴q \Rightarrow \begin{cases} ۱۲k+۴ = ۱۶q \\ ۹k^۲+۶k+۱ = ۱۶q^۲ \end{cases}$$
$$\Rightarrow ۹k^۲+۱۸k+۵ = ۱۶q' \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش سوم:

$$\begin{cases} ۳k+۱ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۲k+۴ \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \\ ۹k^۲+۶k+۱ \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \end{cases} \Rightarrow ۹k^۲+۱۸k+۵ \overset{۱۶}{\equiv} ۰$$
$$۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش چهارم:

$$۴|۳k+۱ \Rightarrow ۴|۳k+۵ \Rightarrow ۱۶|(۳k+۱)(۳k+۵) \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

روش پنجم:

$$۳k+۱ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳k+۵ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow (۳k+۱)(۳k+۵) \overset{۱۶}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۶|۹k^۲+۱۸k+۵$$

۷ گام اول: تعداد گل‌های نوع اول را x و تعداد گل‌های نوع دوم را y در نظر گرفته و معادلهٔ سیاله را می‌نویسیم: $x + y = ۹$

گام دوم: معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$x \overset{۱}{\equiv} ۹ \Rightarrow x = k + ۹ \ ; k \in \mathbb{Z}$$

گام سوم: $x = k + ۹$ را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$k + ۹ + y = ۹ \Rightarrow y = -k \ ; k \in \mathbb{Z}$$

گام چهارم: چون تعداد گل‌ها نمی‌تواند منفی باشد، داریم:

$$k + ۹ \geq ۰ , \ -k \geq ۰ \Rightarrow k \geq -۹ , \ k \leq ۰$$

$$\Rightarrow -۹ \leq k \leq ۰ \Rightarrow \text{تعداد} = ۱۰$$

بنابراین به ۱۰ طریق این عمل ممکن است.

۸ گام اول: تعداد وزنه‌های ۳ کیلویی را x و تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی را y در نظر گرفته و معادلهٔ سیالهٔ زیر را می‌نویسیم:

$$۳x + ۵y = ۲۳$$

گام دوم: معادلهٔ سیاله را به معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۲۳ \Rightarrow ۳x \overset{۵}{\equiv} ۳ \xrightarrow[(۳,۵)=۱]{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۵k + ۱ \ , (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم: $x = ۵k + ۱$ را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$۳(۵k + ۱) + ۵y = ۲۳ \Rightarrow ۵y = -۱۵k + ۲۰ \xrightarrow{\div ۵} y = -۳k + ۴ \ ; (k \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: چون تعداد وزنه‌ها باید صحیح و نامنفی باشد، داریم:

$$۵k + ۱ \geq ۰ \ , \ -۳k + ۴ \geq ۰$$

$$\Rightarrow k \geq -\frac{۱}{۵} \ , \ k \leq \frac{۴}{۳} \xrightarrow{(k \in \mathbb{Z})} k = ۰, ۱ \Rightarrow$$ به دو طریق می‌توان این کار را انجام داد

پاسخ سؤالات ۹ تا ۱۰

۹ a عددی فرد است، بنابراین $a + ۲$ عددی فرد است و $b | a + ۲$، بنابراین b نیز عددی فرد خواهد بود. (۰/۲۵)
می‌دانیم مربع هر عدد فرد، مضربی از عدد ۸ به‌علاوهٔ یک است. (۰/۲۵)

$$a^۲ + b^۲ + ۳ = (۸m + ۱) + \underset{(۰/۲۵)}{(۸n + ۱)} + ۳ = ۸\underset{(۰/۲۵)}{(m + n)} + ۵ \Rightarrow r = ۵ \quad (۰/۲۵)$$

۱۰

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} ۶ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۱۲ + ۱۰$$

$$\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۱۳} \times ۱۲ + ۱۰ \overset{۷}{\equiv} -۲ \overset{۷}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

۱۱ الف روش اول:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq ۲$$

برای احاطه کردن رأس‌های f, h حداقل به یک رأس نیاز است و هیچ رأس دیگری به تنهایی نمی‌تواند سایر رأس‌ها را احاطه کند، پس به بیش از دو رأس برای احاطه‌گری نیاز است. از طرفی چون مجموعهٔ $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq ۳$ پس $\gamma(G) = ۳$

روش دوم:

برای احاطه کردن رئوس f, g, h, e حداقل به یک رأس نیاز است. همچنین برای چهار رأس باقی‌مانده حداقل به دو رأس دیگر نیاز است. یعنی $\gamma(G) \geq ۳$. از طرفی مجموعهٔ $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، پس $\gamma(G) = ۳$

ب $\{f, h, e, d, b\}$

۱۲

$$A = ۲۱a^۲ = ۳ \times ۷ \times a^۲ \ , \ B = ۳۵a^۳ = ۵ \times ۷ \times a^۳ \Rightarrow [A, B] = ۱۰۵a^۳$$

۱۳

$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴ \times ۵ + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{(۷,۴)=۱}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k + ۳$$

۱۴

$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴$$
$$y = ۹k + ۴, ۹x = ۷ - ۱۳(۹k + ۴) = -۱۱۷k - ۴۵ \Rightarrow x = -۱۳k - ۵$$

۱۵ می‌توان نوشت:

$$۲^۳ \overset{۷}{\equiv} ۸ \overset{۷}{\equiv} ۸ - ۷ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۳)^۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \overset{۷}{\equiv} ۲$$

$$۳^۳ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ \overset{۷}{\equiv} ۲۷ - ۷ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۳^۳)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۰} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۳۱} \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$۵^۲ \overset{۷}{\equiv} ۲۵ \overset{۷}{\equiv} ۲۵ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۵^۳ \overset{۷}{\equiv} ۵ \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۲۰ - ۷ \times ۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۵^۳)^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۱۴} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۵$$

درنتیجه:

$$۲^{۲۵} \times ۳^{۳۱} + ۵^{۴۳} \overset{۷}{\equiv} ۶ + ۵ \overset{۷}{\equiv} ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

پادینو padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۱۶ گام اول: تعداد سؤالات ۷ امتیازی که فرد جواب صحیح داده است را x و تعداد سؤالات ۹ امتیازی که فرد جواب صحیح داده است را y در نظر می‌گیریم و معادلهٔ سیاله را می‌نویسیم: $۷x + ۹y = ۷۳$

گام دوم: معادله را به معادلهٔ همنهشتی تبدیل کرده و داریم:

$$۷x \overset{۹}{\equiv} ۷۳ \xrightarrow{۷۳ \overset{۹}{\equiv} ۱} ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۱ + ۳ \times ۹$$

$$\Rightarrow ۷x \overset{۹}{\equiv} ۲۸ \xrightarrow[(۹,۷)=۱]{\div ۷} x \overset{۹}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۹k + ۴$$

گام سوم: $x = ۹k + ۴$ را در معادلهٔ اصلی جایگذاری می‌کنیم و داریم:

$$۷(۹k + ۴) + ۹y = ۷۳ \Rightarrow ۹y = -۶۳k + ۴۵ \xrightarrow{\div ۹} y = -۷k + ۵$$

گام چهارم: تعداد سؤال‌های پاسخ داده شده نمی‌تواند عددی منفی باشد و نیز عددی صحیح می‌باشد، بنابراین:

$$۹k + ۴ \geq ۰ \ , \ -۷k + ۵ \geq ۰ \Rightarrow k \geq -\frac{۴}{۹} \ , \ k \leq \frac{۵}{۷} \Rightarrow k = ۰$$

این شخص تنها به یک صورت توانسته این امتیاز را کسب کند.

$$k = ۰ \Rightarrow x = ۴ \ , \ y = ۵$$

تنها حالت قابل‌قبول این است که او به ۴ سؤال ۷ امتیازی و ۵ سؤال ۹ امتیازی پاسخ صحیح داده باشد.

پاسخ سؤالات ۱۷ تا ۱۸

۱۷ ۴

۱۸ b

۱۹ می‌دانیم $۱! \overset{۱۵}{\equiv} ۱$، $۲! \overset{۱۵}{\equiv} ۲$، $۳! \overset{۱۵}{\equiv} ۶$، $۴! \overset{۱۵}{\equiv} ۹$، $۵! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ و ... و $۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$؛ پس داریم:

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

۲۰ باتوجه‌به $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ داریم $\gamma(G) \geq ۲$. (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است (۰/۲۵). از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq ۲$ (۰/۲۵)، درنتیجه $\gamma(G) = ۲$ (عدد احاطه‌گری)(۰/۲۵).

۲۱ الف

$\{b, g, a, f\}$

ب

$\{c, e, h\}$

پ ec یا eh یا gf یا gc

۲۲ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $8k+1$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^2 = 8k+1 \\ b^2 = 8k'+1 \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+5 = 8k+1+8k'+1+5 \Rightarrow a^2+b^2+5 = 8k''+7$$
$$\Rightarrow r = 7$$

۲۳

$$\begin{cases} a|6(5m+4) \\ a|5(6m+5) \end{cases} \Rightarrow a|5(6m+5)-6(5m+4) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۲۴

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2yz+2xz$$
$$\Leftrightarrow (x^2+y^2-2xy)+(y^2+z^2-2yz)+(x^2+z^2-2xz) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط، حکم برقرار است.

۲۵

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} \geq \frac{a+b}{ab} \Leftrightarrow \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{ab} \geq a+b$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

گزاره همواره درست و بر طبق استدلال بازگشتی و برگشت‌پذیر بودن روابط حکم درست است.

۲۶

$$\frac{a^3+b^3}{a+b} \geq ab \Leftrightarrow a^3+b^3 \geq (a+b)\,ab \Leftrightarrow (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \geq (a+b)\,ab$$
$$\Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

بر طبق استدلال بازگشتی چون به عبارت همواره درست رسیده‌ایم، پس حکم برقرار است.

۲۷

$$2x+5y = 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 29 \Rightarrow 2x \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow x = 5k+2$$
$$y = -2k+5$$

۲۸

$$a = 6q+1 \xrightarrow{\times 7} 7a = 42q+7 \ (1)$$
$$a = 7q'+3 \xrightarrow{\times 6} 6a = 42q'+18 \ \ (2)$$
$$(2),(1) \text{ تفاضل} : a = 42(q-q')-11 \Rightarrow a = 21q''+10$$

پس باقی‌مانده برابر با عدد ۱۰ است.

پاسخ سؤالات ۲۹ تا ۳۲

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۹ همبند

۳۰ زوج

۳۱ $p-۱$

۳۲ k- منتظم

۳۳

$$(۵a+۴, ۲a+۳)=d \Rightarrow \begin{cases} d|۲a+۳ \\ d|۵a+۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|-۲(۵a+۴)+۵(۲a+۳)$$

$$d|۷ \Rightarrow d=۱ \text{یا} ۷$$

۳۴

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r=۲$$

۳۵

فرض کنیم : $(p,a)=d \Rightarrow \begin{cases} d|p \xrightarrow{\text{اول } p} d=۱ \text{ یا } d=p \\ d|a \quad (۱) \end{cases}$

اگر $d=p \xrightarrow{(۱)} p|a$ (و این با فرض $p \nmid a$ تناقض دارد) $\Rightarrow (p,a)=۱$ یا $d=۱$ پس فقط

تذکر: توجه دارید که در مورد اعدادی که اول نباشند، این مطلب ممکن است برقرار نباشد:

مثال : $۴|۶$ ولی $(۴,۶)=۲ \neq ۱$