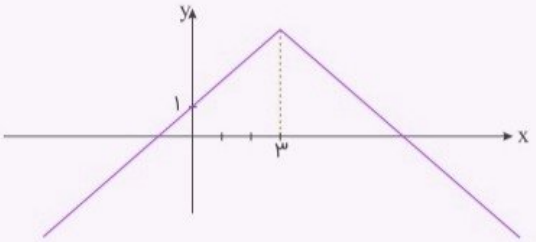
آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : **حسابان**	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : **ریاضی**	**پایه ی دوازدهم دوره ی متوسطه**	تعداد صفحات : **۱۱ صفحه**
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	**جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید**		

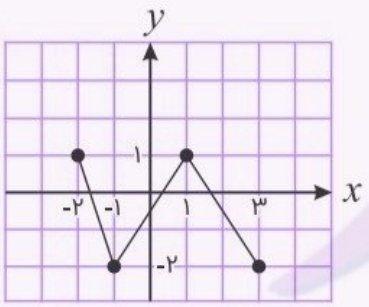
ردیف	سوالات	نمره

۱ اگر نمودار زیر فقط با استفاده از قرینه‌یابی و انتقال تابع $y = |x|$ به دست آمده باشد، ضابطهٔ آن را به دست آورید.



۲ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x-۳}{x^۲-۹}$ را در صورت وجود، به دست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن، نمایش دهید.

۳ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. با استفاده از انتقال، نمودار تابع $y = f(\frac{۱}{۲}x) + ۱$ را رسم کنید.



۴ آیا اگر تابعی در بازه‌های $I_۱$ و $I_۲$ اکیداً نزولی باشد می‌توان گفت در مجموعهٔ $I_۱ \cup I_۲$ نیز اکیداً نزولی است؟ برای ادعای خود مثال بزنید.

۵ نمودار $y = -۳\sin(x + \frac{\pi}{۶})$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

۶

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|}$$

۷

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۲x^۳ - ۵x + ۱}{۶x^۳ - ۱۱x^۲ - ۳}$$

۸ اگر $۰ < x < ۲\pi$، از تساوی های زیر مقدار x را به دست آورید.

الف

$$۳^{\sin x \cos x} = \sqrt{۳}$$

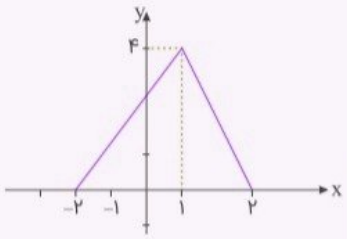
ب

$$a^{\log_a^{\sin x}} - b^{\log_b^{\cos x}} = ۰$$

۹ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^۳ + ax + ۱$ و $q(x) = ۲x^۲ - x + ۱$ بر $(x + ۲)$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.

۱۰ مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{۱ + ۲x^۲}{۱ - x^۲}$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۱ اگر نمودار $y = f(۲x - ۳)$ به صورت زیر باشد، نمودار $y = f(x)$ به چه شکل است؟



۱۲ اگر مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^۲ + x + ۱}{(a - ۱)x^۲ - ۱۲}$ به‌صورت $y = \frac{۴}{۳}$ باشد، مجانب‌های قائم این تابع را محاسبه کنید.

۱۳ نمودار $y = \frac{۳x + ۴}{x + ۲}$ را به کمک نمودار $y = \frac{۱}{x}$ رسم نمایید.

معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

۱۴ $۲\cos^۲ x + \cos x - ۱ = ۰$

کدام‌یک از جملات درست و کدام‌یک نادرست است؟

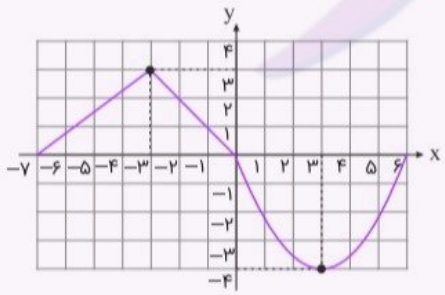
۱۵ درجه تابع $f(x) = x^۲(۱ - x^۲)^۲ - x^۲$ برابر ۴ است.

۱۶ نمودار تابع $f(x) = \tan x$ در دامنه خود اکیداً صعودی است.

۱۷ حاصل $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{۱}{x - ۱}$ برابر صفر است.

۱۸ اگر n عددی فرد باشد $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n$ برابر با $-\infty$ است.

۱۹ اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار توابع $y = f(۳x)$ و $y = f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.



۲۰ معادلهٔ $\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.

۲۱ نمودار تابع $f(x) = \log_{۲}^{(\frac{۲x}{۳})}$ را به کمک نمودار تابع $y = \log_{۲}^{x}$ رسم کنید.

۲۲ اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{۳x^{۲} - ۲x + ۱}{ax^{۲} + ۲x + ۸}$ فقط دارای یک مجانب قائم باشد، اولاً مقدار a را به دست آورید. ثانیاً مشخص کنید مجانب افقی تابع f محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ $(a \neq ۰)$

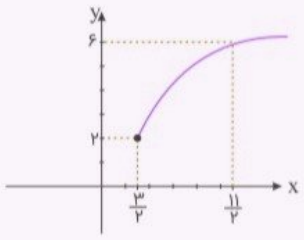
پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۲۳ تابع $f(x) = \frac{۴}{|x| + x}$ در همسایگی مجانب قائم خود چگونه است؟

۲۴ معادله $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید.

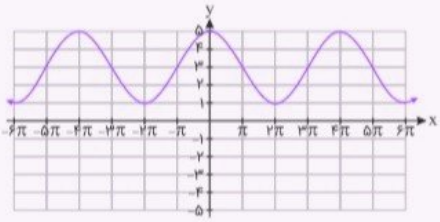
۲۵ از طریق رسم نمودار، نشان دهید دو تابع $f(x) = (-۱)^{[x]} \sin \pi x$ و $g(x) = |\sin \pi x|$ باهم برابرند.

۲۶ نمودار زیر از انتقال‌های عمودی و یا افقی و همچنین انبساط یا انقباض افقی تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ آن را بیابید.



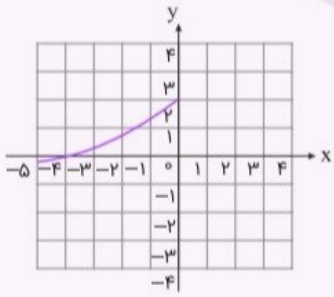
۲۷ نمودار تابع $f(x) = \frac{x+۱}{x^۳+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی است؟

۲۸ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ است. باتوجه‌به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

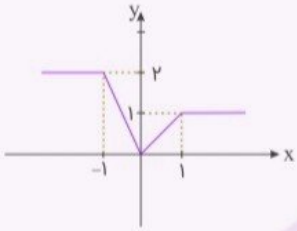


۲۹ جواب معادلهٔ $\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را به دست آورید.

۳۰ نمودار تابع زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ این تابع را بنویسید.



۳۱ اگر نمودار $y = f(۲x-۱)$ به‌صورت زیر باشد، نمودار $y = f(۳x+۱)$ را رسم کنید.



۳۲ در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف

$T = \pi \ , \ \max = ۳ \ , \ \min = -۳$

ب

$T = ۳ \ , \ \max = ۹ \ , \ \min = ۳$

پ

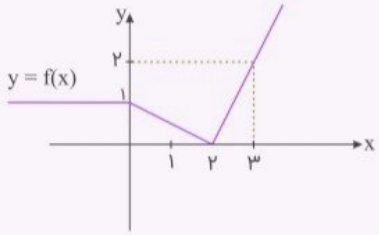
$T = ۴\pi \ , \ \max = -۱ \ , \ \min = -۷$

ت

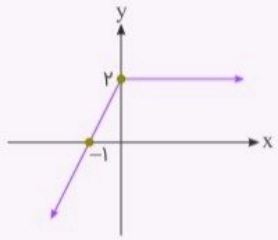
$T = \frac{\pi}{۲} \ , \ \max = ۱ \ , \ \min = -۱$

۳۳ در تابع $y = \sqrt{x - ۱}$ ابتدا نمودار را با ضریب $\frac{۱}{k}$ انقباض افقی داده و سپس به‌اندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ به راست انتقال می‌دهیم. اگر دامنهٔ تابع تغییری نکند، مقدار k را بیابید.

۳۴ نمودار زیر مربوط به تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $y = ۲f(۱ - \frac{x}{۲})$ را رسم کنید.



۳۵ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

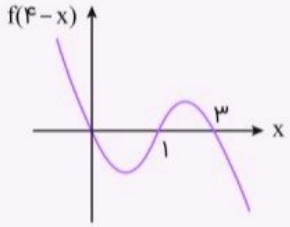


الف نمودار تابع $g(x) = -۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

ب مقدار $g(۵)$ را به‌دست آورید.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۶ نمودار تابع $y = f(۴ - x)$، مطابق شکل زیر است. دامنهٔ تعریف $y = \sqrt{-xf(x+۱)}$، کدام عدد را شامل نمی‌شود؟



۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۳۷ معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + \sin x = ۰$ را حل کنید.

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۳۸ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید (راه‌حل نوشته شود).

$$y = ۸\cos(\frac{x}{۳})$$

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را
فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org

۳۹ نمودار $y = \sqrt{۴ - ۲x}$ را به کمک نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.

۴۰ اگر دامنه تابع $y = f(x)$ به‌صورت $[-۳, ۲]$ باشد، دامنه تابع $y = ۲f(۱ - ۲x) + ۱$ کدام است؟

ردیف	پاسخنامه	نمره

۱ واضح است که روش‌های مختلفی وجود دارد تا به جواب برسیم. یک روش آن است که بگوییم:
ابتدا نمودار $y = |x|$ نسبت به محور طول‌ها قرینه شده، سپس ۳ واحد به راست انتقال پیدا کرده است و مقدار انتقال عمودی آن را باید با محاسبات پیدا کنیم:

$$y = |x| \xrightarrow[\text{محور طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = -|x| \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} y = -|x-۳|$$

$$\xrightarrow{\text{k واحد به بالا}} y = -|x-۳| + k = f(x)$$

$$f(۰) = ۱ \Rightarrow -۳ + k = ۱ \Rightarrow k = ۴ \Rightarrow f(x) = -|x-۳| + ۴$$

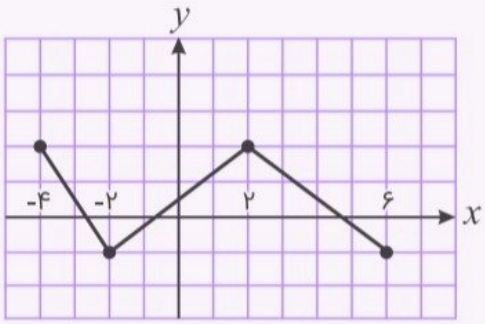
۲ در تابع $f(x) = \dfrac{(x-۳)}{(x-۳)(x+۳)}$، خط $x = ۳$، شرایط مجانب قائم را ندارد. $(\lim\limits_{x\to ۳} f(x) = \frac{۱}{۶})$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -۳^-} f(x) = \dfrac{۱}{۰^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -۳^+} f(x) = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty \end{cases}$$

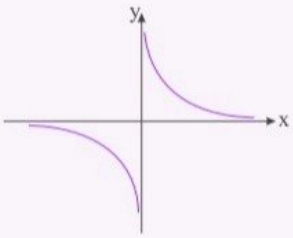
$\Rightarrow$ $x = -۳$ مجانب قائم منحنی تابع f است

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x}{x^۲} = ۰ \Rightarrow y = ۰$ مجانب افقی

۳



۴ اگر تابعی در بازه‌های $I_۱$ و $I_۲$ اکیداً نزولی باشد لزوماً در $I_۱ \cup I_۲$ اکیداً نزولی نیست. به‌طور مثال در تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ داریم:



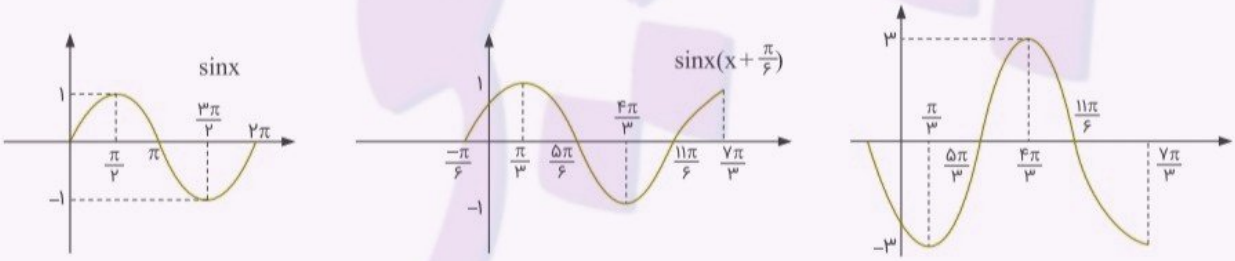
$I_۱ = (-\infty, ۰)$ اکیداً نزولی

$I_۲ = (۰, +\infty)$ اکیداً نزولی

$I_۱ \cup I_۲ = \mathbb{R} - \{۰\}$ اکیداً نزولی نیست

زیرا در اجتماع این دو بازه داریم: $-۲ < ۲ \not\Rightarrow \underbrace{f(-۲)}_{-\frac{۱}{۲}} > \underbrace{f(۲)}_{\frac{۱}{۲}}$.

۵



پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|} = \frac{-۳}{۰^+} = -\infty$$

۷

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}}{۶x^{۳}}=\frac{۱}{۳}$$

۸ الف

$$۲\sin x\cos x=\sin ۲x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

$$۳^{\sin x\cos x}=\sqrt{۳}\Rightarrow ۳^{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۳^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow \sin ۲x=۱\Rightarrow\begin{cases}۲x=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=\frac{۵\pi}{۲}\Rightarrow x=\frac{۵\pi}{۴}\end{cases}$$

ب نکته:

$$a^{\log_a^b}=b\,,\ a>۰\,,\ a\neq ۱\,,\ b>۰$$

$$a^{\log_a^{\sin x}}=\sin x\ ,\ \ b^{\log_b^{\cos x}}=\cos x\Rightarrow \sin x=\cos x\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۴}\\ x=\frac{۵\pi}{۴}\quad \text{غ.ق.ق}\end{cases}$$

$x=\frac{۵\pi}{۴}$ غیرقابل‌قبول است، چون در صورت تساوی باید $\sin x>۰$ و $\cos x>۰$ باشد.

۹

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow\begin{cases}p(-۲)=-۲a-۷\\ q(-۲)=۱۱\end{cases}\Rightarrow p(-۲)=q(-۲)\Rightarrow a=-۹$$

۱۰

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^{۲}}{-x^{۲}}=-۲\quad\Rightarrow y=-۲\ \text{مجانب افقی}$$

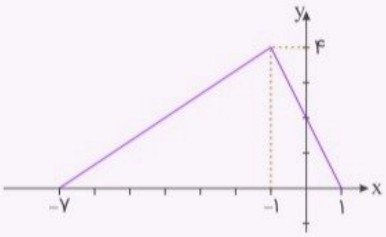
$$۱-x^{۲}=۰\ \Rightarrow x=\pm۱\ \ \text{مجانب های قائم}$$

۱۱ اگر نقطهٔ $A\,(x_۰,y_۰)$ متعلق به تابع $y=f\,(۲x-۳)$ باشد و نقطهٔ $A'\,(x',y')$ متعلق به تابع $y=f\,(x)$ باشد، داریم:

$$\begin{cases}۲x_۰-۳=x'\\ y_۰=y'\end{cases}$$

پس برای به دست آوردن نقاط تابع $y=f\,(x)$ ، طول نقاط واقع بر $y=f\,(۲x-۳)$ را دو برابر کرده سپس منهای ۳ می‌کنیم.

$$(۲,۰)\in y=f\,(۲x-۳)\Rightarrow f\,(۲\times۲-۳)=۰\Rightarrow f\,(۱)=۰\Rightarrow(۱,۰)\in y=f\,(x)$$
$$(۱,۴)\in y=f\,(۲x-۳)\Rightarrow f\,(۲\times۱-۳)=۴\Rightarrow f\,(-۱)=۴\Rightarrow(-۱,۴)\in y=f\,(x)$$
$$(-۲,۰)\in y=f\,(۲x-۳)\Rightarrow f\,(۲\times(-۲)-۳)=۰\Rightarrow f\,(-۷)=۰\Rightarrow(-۷,۰)\in y=f\,(x)$$



۱۲

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax^۲}{(a-۱)x^۲} = \frac{a}{a-۱} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a = ۴ \Rightarrow f(x) = \frac{۴x^۲ + x + ۱}{۳x^۲ - ۱۲}$$

$$۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲\ ,\ x = -۲$$

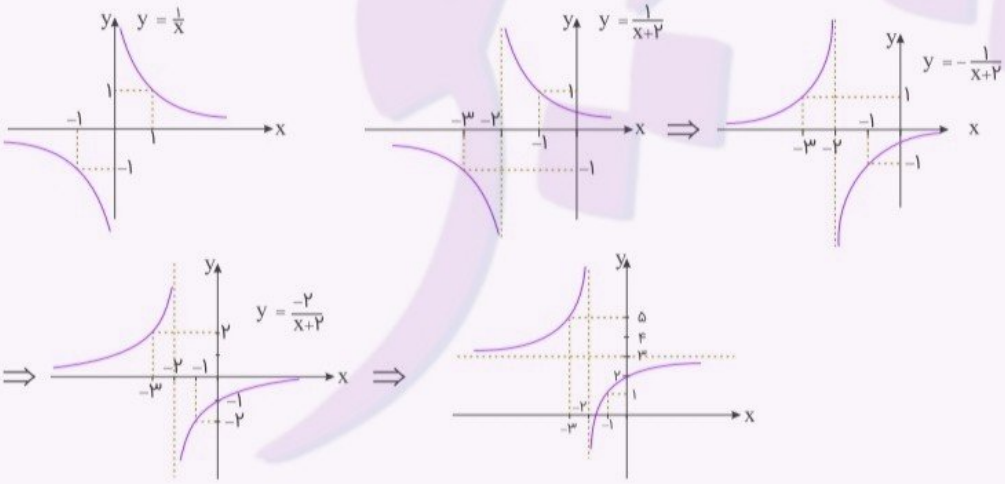
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \dfrac{۴\times ۴ + ۲ + ۱}{۱۲^+ - ۱۲} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \dfrac{۴\times ۴ + ۲ + ۱}{۱۲^- - ۱۲} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to (-۲)^+} = \dfrac{۴\times ۴ - ۲ + ۱}{۱۲^- - ۱۲} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to (-۲)^-} = \dfrac{۴\times ۴ - ۲ + ۱}{۱۲^+ - ۱۲} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{مجانب‌های قائم f می‌باشند} \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases} \text{دو خط}$$

۱۳

$$y = \frac{۳x + ۴}{x + ۲} = \frac{۳(x+۲) - ۲}{x + ۲} = ۳ - \frac{۲}{x + ۲}$$

$$y = \frac{۱}{x} \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۲ واحد انتقال}} y = \frac{۱}{x + ۲} \xrightarrow[\text{طول‌ها}]{\text{قرینه نسبت به محور}} y = -\frac{۱}{x + ۲}$$

$$\xrightarrow[\text{با ضریب ۲}]{\text{انبساط عمودی}} y = -\frac{۲}{x + ۲} \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۳ واحد انتقال}} y = ۳ - \frac{۲}{x + ۲}$$



پاسخ سؤال ۱۴

۱۴

$$۲\cos^{۲}x+\cos x-۱=۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x=-۱ \Rightarrow x=۲k\pi+\pi \\ \cos x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳} \\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ سؤالات ۱۵ تا ۱۸

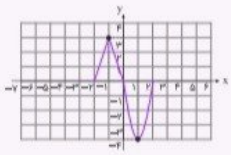
۱۵ نادرست

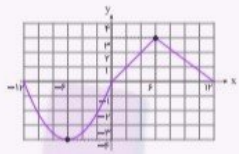
۱۶ نادرست

۱۷ درست

۱۸ درست

۱۹





۲۰ ابتدا این معادله را به‌صورت $۲\cos^{۲}x-۹\cos x-۵=۰$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x=t$ می‌توان معادلهٔ فوق را به معادلهٔ درجهٔ دوم $۲t^{۲}-۹t-۵=۰$ تبدیل کرد.

$$\Delta=۹^{۲}-۴(۲)(-۵)=۱۲۱ \Rightarrow t=\frac{۹\pm ۱۱}{۴}$$

جواب‌های این معادله $t=-\frac{۱}{۲}$ و $t=۵$ است، بنابراین جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی بالا از حل دو معادلهٔ سادهٔ $\cos x=۵$ و $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آیند. ازآنجاکه $\cos x=۵$ جواب ندارد (همواره $\cos x\leq ۱$)، فقط جواب‌های معادلهٔ $\cos x=-\frac{۱}{۲}$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳} \quad ;k\in\mathbb{Z}$$

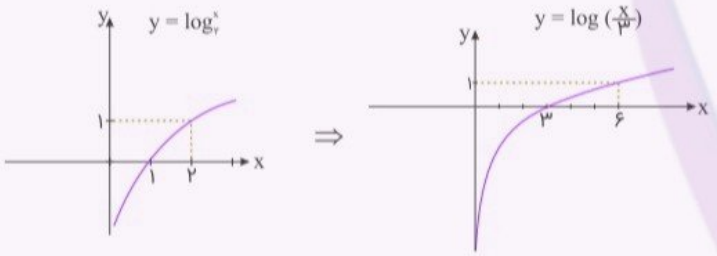
۲۱ نقطهٔ $A(x_\circ, y_\circ)$ روی تابع $y = \log_۲^x$ قرار دارد و متناظر آن نقطهٔ $A'(x', y')$ روی تابع $y = \log_۲^{(\frac{۲-x}{۳})}$ قرار دارد.

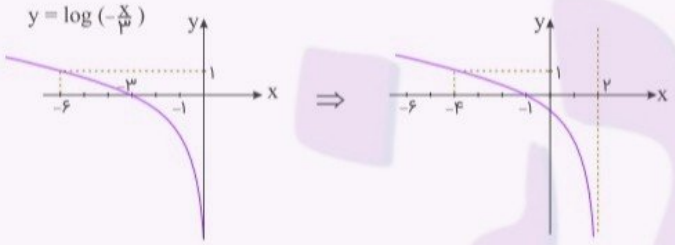
$$\begin{cases} \dfrac{۲ - x'}{۳} = x_\circ \Rightarrow x' = ۲ - ۳x_\circ \\ y' = y_\circ \end{cases}$$

یعنی ابتدا طول نقاط را ۳ برابر کرده و سپس نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌کنیم، نهایتاً به آن‌ها ۲ واحد اضافه می‌کنیم:

$$y = \log_۲^x \xrightarrow[\text{انبساط افقی}]{\text{با ضریب } k=۳} y = \log(\frac{x}{۳}) \xrightarrow[\text{محور عرض‌ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y = \log(\frac{-x}{۳})$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y = \log(\frac{-(x-۲)}{۳}) = \log(\frac{۲-x}{۳})$$





۲۲

$$f(x) = \frac{۳x^۲ - ۲x + ۱}{ax^۲ + ۲x + ۸}$$

چون تابع f فقط یک مجانب قائم دارد، پس باید مخرج کسر ریشهٔ مضاعف داشته باشد. درنتیجه باید در مخرج $\Delta = \circ$ باشد؛ پس داریم:

$$\Delta = \circ \Rightarrow b^۲ - ۴ac = \circ \Rightarrow ۴ - ۴a \times ۸ = \circ \Rightarrow a = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{۳x^۲}{\frac{۱}{۸}x^۲} = ۲۴ \quad \text{مجانب افقی}$$

درنتیجه خط $y = ۲۴$ مجانب افقی است و مجانب افقی محور yها را در نقطهٔ $(\circ, ۲۴)$ قطع خواهد کرد.

۲۳

$$|x| + x = ۰ \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow x \leq ۰ \ , \ \ D = (۰, +\infty)$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{x>۰} \frac{۴}{x + |x|} = \frac{۴}{۲x}$$

$$۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$$

پس $x = ۰$ مجانب قائم تابع می‌باشد. دقت کنید که تابع در همسایگی راست $x = ۰$ تعریف می‌شود.

$$\lim_{x \to ۰^+} \frac{۴}{|x| + x} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{۴}{۲x} = \frac{۴}{۰^+} = +\infty$$

۲۴ روش اول:

$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi \\ x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$۲\sin x \cos x - \sin x = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos x - ۱) = ۰$$

روش دوم:

$$\begin{cases} \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

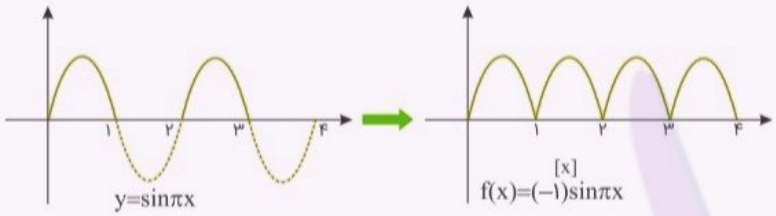
۲۵ نکته: دورهٔ تناوب توابع $f(x) = \sin ax$ و $g(x) = \cos ax$ برابر است با:

$$f(x) = (-۱)^{[x]} \sin \pi x\,,\ T = \frac{۲\pi}{|a|}$$

$$[x] \text{ زوج} \Rightarrow f(x) = \sin \pi x \Rightarrow [۰, ۱), [۲, ۳), \ldots$$

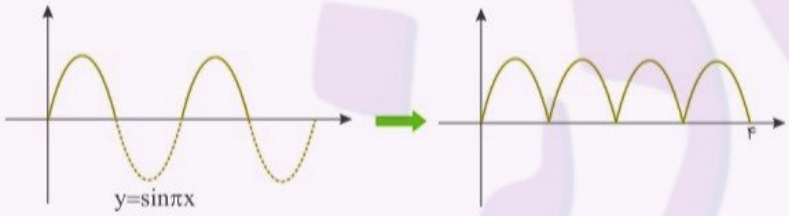
$$[x] \text{ فرد} \Rightarrow f(x) = -\sin \pi x \Rightarrow [۱, ۲), [۳, ۴), \ldots$$

دورهٔ تناوب $y = \sin \pi x$ برابر است با $T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$. در زیر شکل f رسم شده است.



درواقع نمودار $y = \sin \pi x$ را در بازه‌های $[۱, ۲)$ و $[۳, ۴)$ و ... نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:

$$g(x) = |\sin \pi x|$$



باتوجه‌به اشکال بالا، مشخص است که: $f(x) = g(x)$

۲۶ چون نقطهٔ شروع ۲ واحد بالا رفته، پس یک انتقال عمودی ۲ واحدی صورت گرفته است. حال اگر فرض کنیم نمودار به‌اندازهٔ a واحد به راست انتقال پیدا کرده و سپس با ضریب b، انبساط یا انقباض افقی صورت گرفته، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۲ واحد انتقال}} y = \sqrt{x} + ۲ \xrightarrow[\text{راست}]{\text{a واحد به}} y = \sqrt{x - a} + ۲$$

$$\xrightarrow[\text{انبساط یا انقباض افقی}]{\text{با ضریب b}} y = \sqrt{bx - a} + ۲ = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\frac{۳}{۲}) = ۲ \Rightarrow \sqrt{\frac{۳}{۲}b - a} + ۲ = ۲ \\ f(\frac{۱۱}{۲}) = ۶ \Rightarrow \sqrt{\frac{۱۱}{۲}b - a} + ۲ = ۶ \end{cases}$$

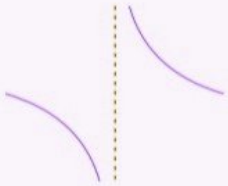
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{۲}b - a = ۰ \\ \frac{۱۱}{۲}b - a = ۱۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} ۴b = ۱۶ \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow a = ۶$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{۴x - ۶} + ۲$$

۲۷

$$x\left(x^{۲}+۱\right)=۰ \Rightarrow x=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} \frac{x+۱}{x^{۳}+x}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۰^{-}} \frac{x+۱}{x^{۳}+x}=-\infty$$



۲۸

$$c=\frac{۵+۱}{۲}=۳$$

$$|a|=\frac{۵-۱}{۲}=۲ \quad , \quad a>۰ \Rightarrow a=۲$$

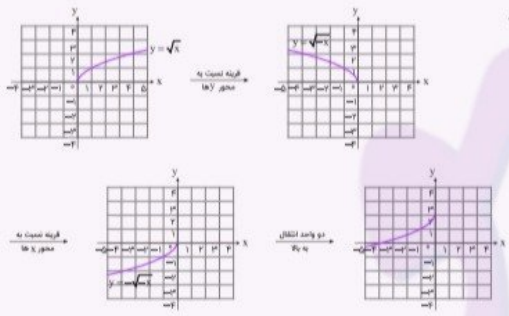
$$|b|=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳ \text{ یا } y=۲\cos(-\frac{x}{۲})+۳$$

۲۹

$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

۳۰

درواقع نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ هم نسبت به محور xها و هم نسبت به محور yها قرینه شده است و ۲ واحد در راستای قائم به بالا منتقل شده است؛ بنابراین ضابطهٔ تابع برابر است با: $y=-\sqrt{-x}+۲$



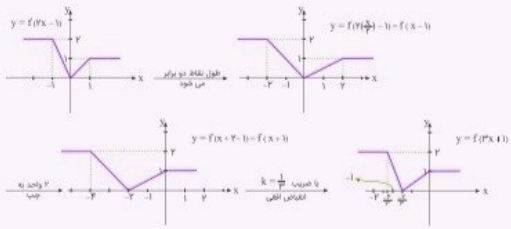
۳۱

فرض می‌کنیم نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ متعلق به تابع $y=f(۲x-۱)$ و نقطهٔ متناظر آن $A'(x',y')$ متعلق به تابع $y=f(۳x+۱)$ است.

$$\begin{cases} ۳x'+۱=۲x_۰-۱ \Rightarrow x'=\dfrac{۲x_۰-۲}{۳} \\ y'=y_۰ \end{cases}$$

بنابراین ابتدا طول نقاط دو برابر شده یعنی با ضریب $k=۲$ انبساط افقی پیدا می‌کند سپس دو واحد به چپ انتقال پیدا کرده و سپس با ضریب $k=\frac{۱}{۳}$ انقباض افقی پیدا می‌کند.

پادینو
padino
0912 8400 754
021 6690 6790
پادینو اینجاست تا اجازه نده، رویاهاتون را فراموش کنید 💜
www.padino.org
t.me/padino_org



۳۲ تابع موردنظر را $y = a\sin bx + c$ در نظر می‌گیریم (برای سهولت در محاسبه مقدار a و b را مثبت فرض می‌کنیم).

الف

$$\begin{cases} |a| + c = ۳ \\ -|a| + c = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳ \\ c = ۰ \end{cases}$$

$$T = \frac{۲\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = ۲ \Rightarrow y = ۳\sin ۲x$$

ب

$$\begin{cases} |a| + c = ۹ \\ -|a| + c = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲c = ۱۲ \Rightarrow c = ۶\,,\ |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳$$

$$T = \frac{۲\pi}{b} = ۳ \Rightarrow b = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow y = ۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x) + ۶$$

پ

$$\begin{cases} |a| + c = -۱ \\ -|a| + c = -۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳ \\ c = -۴ \end{cases}$$

$$T = \frac{۲\pi}{b} = ۴\pi \Rightarrow b = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۳\sin\frac{x}{۲} - ۴$$

ت

$$\begin{cases} |a| + c = ۱ \\ -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۰\,,\ |a| = ۱ \xrightarrow{a>۰} a = ۱$$

$$T = \frac{۲\pi}{b} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow b = ۴ \Rightarrow y = \sin ۴x$$

۳۳

$$y = \sqrt{x-۱} \xrightarrow[\text{انقباض افقی}]{\text{با ضریب } \frac{۱}{k}} y = \sqrt{kx-۱} \xrightarrow[\text{انتقال به راست}]{\frac{۲}{۳} \text{ واحد}} y = \sqrt{k(x-\frac{۲}{۳})-۱}$$

$$= \sqrt{kx - \frac{۲}{۳}k - ۱}$$

$$y = \sqrt{x-۱} \Rightarrow D : x \geq ۱$$

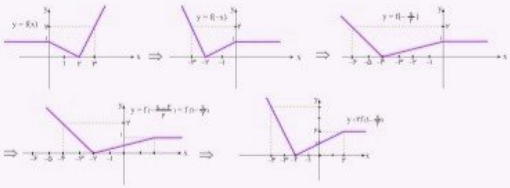
$$y = \sqrt{kx - \frac{۲}{۳}k - ۱} \Rightarrow D : kx - \frac{۲}{۳}k - ۱ \geq ۰ \Rightarrow kx \geq \frac{۲}{۳}k + ۱$$

$$\xrightarrow[k>۰]{\div k} x \geq \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{k} \Rightarrow \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{k} = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{k} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow k = ۳$$

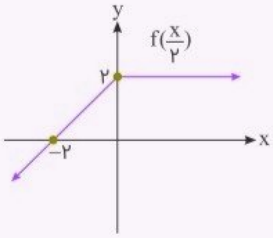
۳۴ فرض می‌کنیم نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ متعلق به تابع $y = f(x)$ است و نقطهٔ متناظر آن یعنی $A'(x', y')$ روی تابع $y = 2f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ می‌باشد.

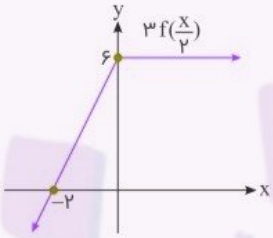
$$\begin{cases} 1 - \frac{x'}{2} = x_0 \Rightarrow x' = 2 - 2x_0 \\ y' = 2y_0 \end{cases}$$

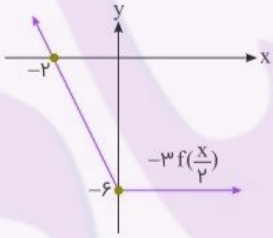
پس نقاط واقع بر f، ابتدا نسبت به محور عرض‌ها قرینه می‌شوند. بعد با ضریب ۲، انبساط افقی می‌یابند و سپس ۲ واحد به راست منتقل می‌شوند. سپس عرض نقاط با ضریب ۲ انبساط عمودی پیدا می‌کند.



۳۵ **الف** روش اول:

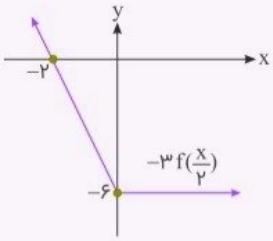






روش دوم: (انتقال نقاط)

$(-1, 0) \to (-2, 0)$ $\qquad$ $(0, 2) \to (0, -6)$

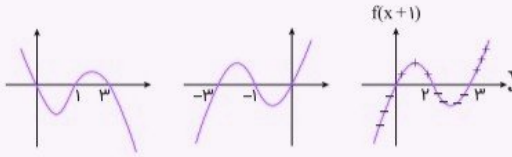


ب $g(5) = -6$

۳۶ گزینه ۲

با استفاده از تبدیلات زیر، نمودار تابع $f(x+۱)$ را رسم می‌کنیم:

$$y = f(۴-x) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}} f(x+۴) \xrightarrow{\text{۳ واحد به راست}} f(x+۱)$$



$$y = \sqrt{-xf(x+۱)} \Rightarrow D_y = \underbrace{-xf(x+۱)}_{P} \geq ۰$$

x		۰		۲		۳	
f(x+۱)	−	●	+	●	−	●	+
−x	+	●	−		−		−
P	−	●	−	●	+	●	−

دامنه، شامل ۳ عدد صحیح ۰، ۲ و ۳ است و ۱ را شامل نمی‌شود.

$$D_y = \{۰\} \cup [۲,۳]$$

۳۷

$$\cos ۲x + \sin x = ۰ \Rightarrow -۲\sin^۲ x + \sin x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\sin x = t} -۲t^۲ + t + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \Rightarrow \sin x = ۱ \\ t = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} & ; k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} & ; k \in \mathbb{Z} \\ x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} & ; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۳۸

۳۸

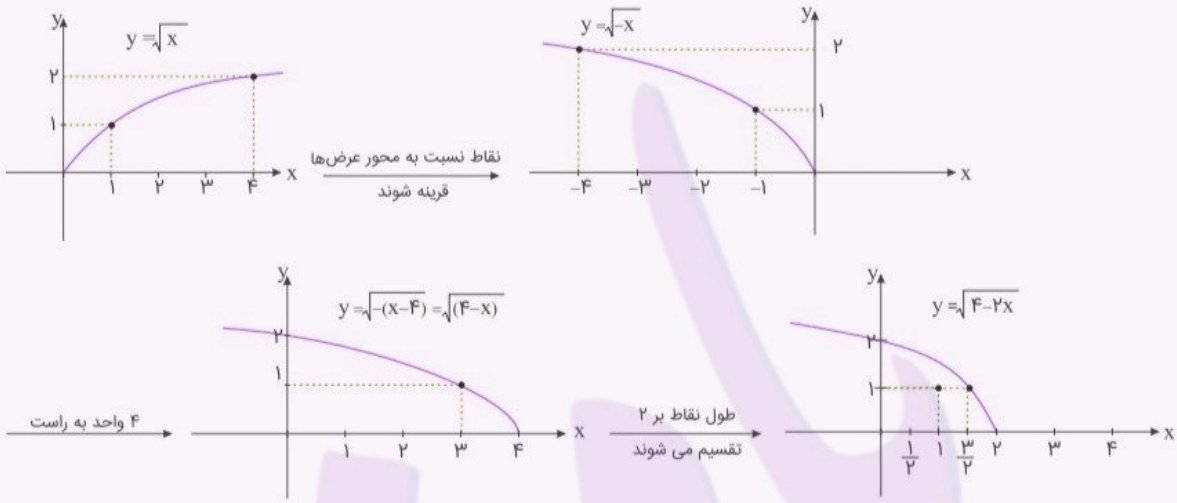
$$\begin{cases} \min = -|a| + c & \min = -۸ \\ \max = |a| + c & \max = ۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۳}|} = ۶\pi$$

۳۹ فرض می‌کنیم نقطهٔ $A(x_۰, y_۰)$ متعلق به تابع $f(x) = \sqrt{x}$ است. می‌خواهیم نقطهٔ متناظر آن را روی تابع $g(x) = \sqrt{۴ - ۲x}$ پیدا کنیم. اگر نقطهٔ متناظر آن نقطهٔ $B(x', y')$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} y' = y_۰ \\ ۴ - ۲x' = x_۰ \Rightarrow x' = \dfrac{۴ - x_۰}{۲} \end{cases}$$

پس نقاط واقع بر $y = \sqrt{x}$ ابتدا نسبت به محور عرض‌ها قرینه شده‌اند، در مرحلهٔ بعد به آن‌ها ۴ واحد اضافه شده و سپس طول نقاط بر ۲ تقسیم شده است. عرض نقاط تغییری نکرده است.



۴۰

$$g(x) = ۲f(۱ - ۲x) + ۱$$

$$-۳ \le ۱ - ۲x \le ۲ \Rightarrow -۴ \le -۲x \le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \le x \le ۲ \Rightarrow D_g = [-\frac{۱}{۲}, ۲]$$